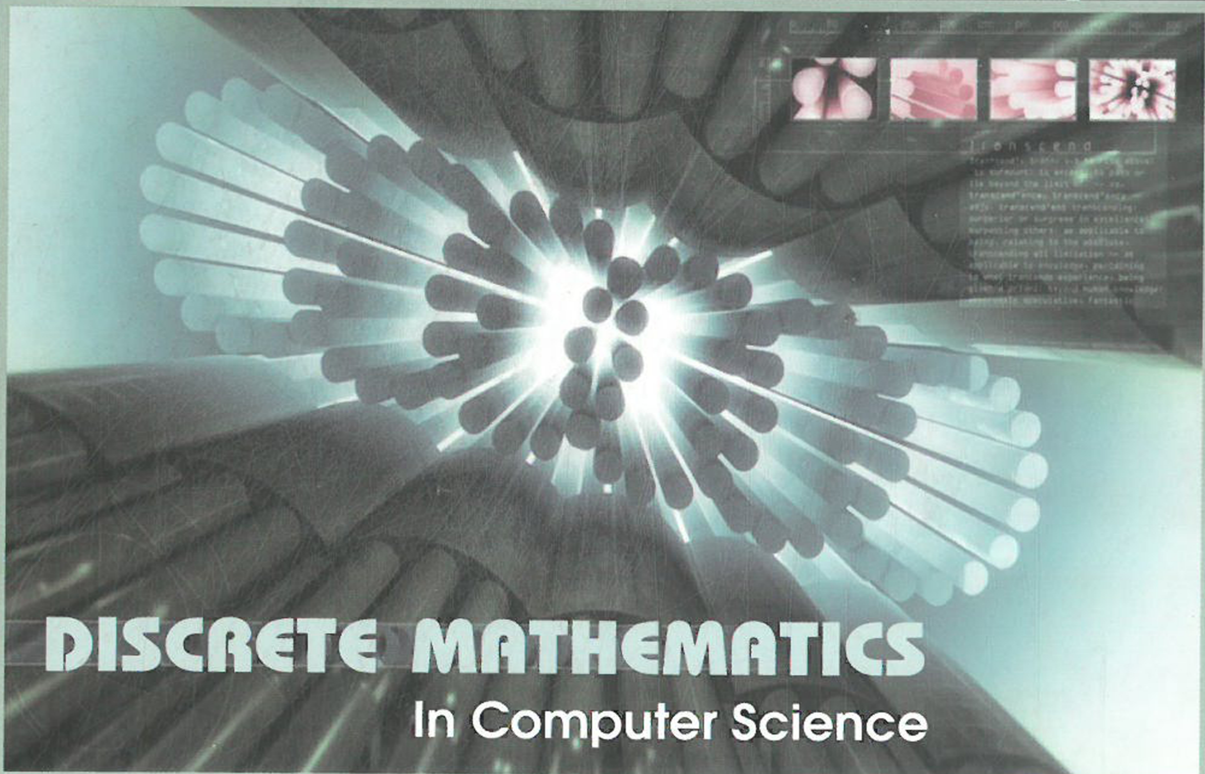
د. أبو بكر أحمد السيد



# DISCRETE MATHEMATICS
## In Computer Science

# الرياضيات المتقطعة
## في علم الحاسوب

مكتبة الفلاح
للنشر والتوزيع

# DISCRETE MATHEMATICS

# IN COMPUTER SCIENCE


**Dr. Abu-Bakr Ahmad El-Sayed**

**Department of Mathematics and Computer Science**
**University of Kuwait**

# الرياضيات المتقطعة

# في علم الحاسوب

# الرياضيات المتقطعة
# في علم الحاسوب

**الدكتور أبو بكر أحمد السيد**
قسم الرياضيات وعلم الحاسوب
جامعة الكويت

بسم الله الرحمن الرحيم

الطبعة الأولى

١٤٢٥هـ - ٢٠٠٤م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ صِبْغَةَ اللَّهِ وَمَنْ أَحْسَنُ مِنَ اللَّهِ صِبْغَةً وَنَحْنُ لَهُ عَابِدُونَ ﴾

(سورة البقرة : ١٣٨)

(*) سُمي الدين صبغة بطريق الاستعارة حيث يظهر أثره على المؤمن كما يظهر أثر الصبغ في الثوب.

## محتويات الكتاب

# المقدمـة

الحمـد لله رب العـالمين ، والصـلاة والسـلام علـى خـاتم المرسـلين محمـد وعلى آله وصحبه أجمعين.

منذ أكثر من أربعة عشر قرنا ، ومنذ أن نزل الروح الأمين جبريل عليه السلام بالوحي مبتدئا بكلمة اقرأ على محمد صلى الله عليه وسلم اكتسبت لغتنا العربية أهمية خاصة ، وصفة تميزها عن غيرها من لغات العالم قاطبة ، وتحولت من لغة محلية ضيقة تتحدث بها مجموعة من القبائل إلى لغة عالمية إنسانية حضارية ، فانتقلت اللغة العربية من مكانها في الجزيرة العربية وفي أجزاء من الشام والعراق لتغزو المشارق والمغارب لتصل إلى الهند والصين شرقا وإلى أوروبا غربا مرورا بإفريقيا .. وأقبل الكثيرون من العرب والأعاجم على اللغة العربية بالدراسة والتحليل حتى استطاعت أن تستوعب بسهولة ويسر النتاج الفكري والعلمي لمختلف الحضارات في العالم. ولم يقتصر عملهم على ترجمة علوم الآخرين فحسب ، وإنما بعد ذلك كان المزج بين الحضارات وكان الإبداع وكان السبق والتأليف في مختلف العلوم باللغة العربية ..

وقد كانت هناك عوامل عديدة دفعت هؤلاء جميعا إلى تعلم وإتقان واستخدام اللغة العربية في شتى المجالات:

- فطلب العلم فريضة على كل مسلم ، وهي علم من العلوم.
- وتعلم العربية كذلك نوع من أنواع العبادة ، لأننا بدون هذه اللغة لا نستطيع أن نفهم القرآن الكريم وأحكام الدين فهما جيدا ، فتعلم اللغة العربية أكثر فرضية من تعلم غيرها من اللغات أو كثير من العلوم.
- وقد غدت اللغة العربية لغة الدولة والعلوم ، والحكومة والسلطان ، فأصبح لزاما على من يريد أن ينهل من علم من العلوم أو أن يصل إلى منصب من المناصب أن يتعلم لغة الدولة التي يظله لواؤها.

ولما كانت اللغة مرتبطة عموما ارتباطا وثيقا بأهلها ، يصيبها ما يصيبهم ، فلما أصيب العرب بالضعف ، ولحقت بهم المآسي ، وتخلفوا عن ركب الحضارة ، كان

طبيعيا أن تتخلف لغتهم عن ركب الحضارة إلى يومنا هذا وإلى أن يهيئ الله لها أقواما كسلفنا الصالح وأجدادنا العظماء ينفضون عنها غبار الدهور ، ويبعثونها من جديد حية مشرقة ..

وجامعات الدول العربية بأساتذتها وطلابها أول من تقع عليهم مسئولية إحياء اللغة العربية ، وجعلها لغة العلوم والثقافة والدرس والتعليم كما كانت سابقا في الحضارة الإسلامية العالمية السامقة ، خاصة وأن اللغة العربية هي أوسع اللغات العالمية مدى ، وأغزرها مادة ، لكثرة أبنيتها ، وتعدد صيغها ، ومرونتها على الاشتقاق ، واستعدادها للتطور ، وقدرتها على الاستيعاب ، وموادها لا تقل عن ثمانين ألف مادة ، وهذا الغنى أعانها على أن تكون لغة خالدة ، بالإضافة إلى كونها لغة القرآن الكريم ، فهي خالدة بخلوده: ﴿ إِنَّا نَحْنُ نَزَّلْنَا الذِّكْرَ ، و إِنَّا لَهُ لَحَافِظُون ﴾. وفي اللغة العربية من أسباب النمو ما يحفظ لها شبابها ، ويجعلها تنجح في أن تكون لغةً لحاضرٍ عظيمٍ مشرق ، كما كانت من قبل لماضٍ عريق .. لغة لكتاب الله تعالى ، وللدين الخاتم ، وللأمة المجاهدة التي نشرت هذا الدين في المشارق والمغارب ، وحملت هذه الرسالة وكافة أنواع العلوم والمعرفة إلى الأمم القاصية والدانية.

الارتباط بين العربية والإسلام

إن الارتباط بين اللغة العربية والإسلام ارتباط وثيق لا ينفصم ، فبالعربية نزل كتاب الإسلام ، وبالإسلام عمت العربية وانتشرت وحفظت مما لحق غيرها من تحريف أو فناء ، وحين انتشر الإسلام حلت اللغة العربية محل لغات القوم في الجاهلية من بربرية وقبطية وسريانية ورومية وغيرها ونسختها.

فمن أفضل الخدمات للإسلام في هذا الزمان ، ومن أَجَلِّ الأعمال للحفاظ على شخصية أمتنا الإسلامية وكيانها ، حماية اللغة العربية ، والمحافظة عليها ، والدفاع عنها في وجه المؤامرات عليها ، والعمل على أن تستعيد مكانتها السامية كلغة حضارية في كافة فروع العلم والثقافة والمعرفة ، وتعريب العلوم وأسلمتها في جامعاتنا وشتى معاهدنا التعليمية.

فإعادة كتابة العلوم الحديثة بأسلوب إسلامي يغرس الإيمان بوجود الخالق عز وجل ووحدانيته وحكمته في نفوس الشباب من خلال دراسته العلمية وتعرضه للحقائق الكونية لهو من أهم واجبات القائمين على شئون التعليم في العالم الإسلامي اليوم ، فليس من شئ أدعى إلى الإيمان بالله تعالى من حقائق العلم ، فيصبح الطالب بعد دراسته عالما مؤمنا ، سواء درس الطب والتشريح ، أو علم الحاسوب ، أو علوم الأحياء والفيزياء ، أو حتى الرياضيات التي تثبت للطالب باستخدام قوانينها استحالة وجود هذا الكون صدفة.

**هذا الكتاب .. والغاية منه**

وضمن جهود التعريب في ميدان العلوم الحديثة ظهرت والحمد لله في السنوات الأخيرة بعض الكتب باللغة العربية (مؤلفة أو مترجمة) في مجال علم الحاسوب ، وهذه الكتب وإن كانت قليلة جدا بالنسبة لما هو مطلوب في عملية تعريب العلوم الحديثة للنهوض بأمتنا ، إلا أنها جهد مشكور ونواة طيبة لمكتبة علمية عربية ندعو الله عز وجل أن يبارك فيها لتثري وتروي ظمأ الطلاب والدارسين والباحثين. وهذا الكتاب إضافة جديدة لهذه المكتبة في موضوع الرياضيات المتقطعة في علم الحاسوب. وقد اتبعنا في منهجه وترتيب فصوله المرجع الرابع في قائمة المراجع المذكورة بنهاية الكتاب ، وهو من أفضل المراجع الحديثة في هذا الموضوع ، مع إعطاء تطبيقات عديدة ومتنوعة في مجالات مختلفة ومن بينها التطبيقات الإسلامية التي تضفي روح الإيمان بالله واليوم الآخر ، حتى تسري هذه الروح في مادة المنهج ، وتساعد بذلك في تكوين العقلية الإسلامية ، وبناء الشخصية الإسلامية. ونأمل بذلك أن ينفع الله تعالى بإذنه سبحانه بهذا الكتاب أبناء العربية ، وأن يسد الكتاب نقصا في المكتبة العلمية العربية ، ويكون بذلك لبنة جديدة في صرح تعريب العلوم الحديثة ، وجهدا متواضعاً ندعو الله عزل وجل أن يبارك فيه فيثقل ميزان حسناتنا يوم نقف بين يدي المولى عز وجل فيسألنا ماذا قدمنا لغدنا ، وماذا عملنا من أجل النهوض بأمتنا ، ورفع راية التوحيد بين الخلق أجمعين.

**فصول الكتاب:**

يتناول الفصل الأول "المنطق والبراهين" مناقشة أصول المنطق (logic) الذي يُعنى بدراسة السببية (reasoning) واستخلاص النتائج من المقدمات، حيث يتناول الفصل دراسة الافتراضات (propositions)، والافتراضات الشرطية (conditional propositions)، والتكافؤ المنطقي (logical equivalence)، والمسوِّرات (quantifiers)، والبراهين (proofs)، والاستقراء / الاستنتاج الرياضي (mathematical induction).

وأما الفصل الثاني "لغة الرياضيات" فيتناول المفاهيم الأساسية لبعض الأدوات التي تُستخدم بكثرة في تطبيقات الرياضيات والهندسة وعلم الحاسوب كالمجموعات (sets)، والمتتاليات / المتواليات / المتتابعات (sequences)، وسلاسل الرموز (strings)، والعلاقات (relations)، وعلاقات التكافؤ (equivalence relations)، والدوال (functions)، مع الإشارة إلى بعض التطبيقات العملية في البرمجة كاستخدام دوال البعثرة (hash functions) في تخزين واسترجاع المعلومات (storing and retrieving information) بسرعة كبيرة، وتوليد الأعداد شبه العشوائية (pseudorandom number generation)، والأرقام المعيارية الدولية للكتب ISBN (International Standard Book Numbers).

ويتعلق الفصل الثالث "طرق العد" بعرض بعض القواعد الأساسية المستخدمة في العد (counting) كقاعدتي الضرب والجمع (multiplication and addition principles)، ونظريات التباديل (permutations) والتوافيق

في تطبيــقات (combinations). وتســتخدم هــذه القواعــد والمــبادئ عــدة كنــظرية ذات الحدين (binomial theorem) ، والمتطابقات التوافيقية (combinatorial identities). ونحتاج لطرق العد عموما في تطبيقات عملية عديدة ، فمثلا لتقدير (estimating) زمن تشغيل خوارزمية (run time of an algorithm) نحتاج لحساب عدد مرات تنفيذ (executing) خطوات (steps) / عُرَى (loops) معينة في الخوارزمية.

وأما الفصل الرابع والأخير "المخططات البيانية والأشجار" فيوضح المفاهيم الأساسية في نظرية المخططات البيانية (graph theory) والتي أصبحت تستخدم في تطبيقات حديثة في مجالات عديدة متنوعة تشمل علم الحاسوب والكيمياء وبحوث العمليات والهندسة الكهربائية واللغويات والاقتصاد. ويبدأ الفصل ببعض المصطلحات الأساسية في علم المخططات البيانية مع توضيحها بالأمثلة ، ثم يعرض مفاهيم المسارات (paths) والدورات (cycles) ، وخوارزمية أقصر مسار (shortest path algorithm) التي توجد بكفاءة عالية أقصر مسار بين نقطتين. ثم يناقش الفصل موضوع الأشجار التي تعد إحدى الطبقات الفرعية للمخططات البيانية والتي تستخدم على نطاق واسع وخاصة في مجال علم الحاسوب ، حيث تفيد الأشجار كثيرا في ترتيب البيانات وتحديد علاقات بعضها ببعض (organizing and relating data) في قاعدة بيانات (database) كما تظهر الأشجار أيضا في بعض المسائل النظرية كإيجاد الوقت الأمثل للفرز / للترتيب (optimal time for sorting). ونبدأ ببعض المصطلحات الخاصة بالأشجار ، ثم نعرض بعض الطبقات الفرعية للأشجار (subclasses of trees) كالأشجار ذوات الجذور (rooted trees) والأشجار الثنائية (binary trees) ، وبعض تطبيقات الأشجار (applications of trees) كالأشجار المولِّدة

واجتيــاز الأشــجار (tree traversals)، (spanning trees).

وفي نهاية كل فصل يوجد عدد كبير من التمرينات والمسائل التي تعين الطالب بإذن الله على فهم واستيعاب المفاهيم والطرق التي وردت في ذلك الفصل. ويمكن للطالب التأكد من صحة هذا الفهم بالرجوع إلى أجوبة التمرينات في نهاية الكتاب.

ونود هنا أن نشكر كل من يساهم بأي جهد في قضية تعريب العلوم ، وظهور وتداول هذه الكتب العلمية باللغة العربية ، ونخص بالذكر أبناءنا وبناتنا من طلاب وطالبات الجامعة الذين يقبلون على دراسة هذه المناهج وقراءة تلك الكتب ومناقشة موضوعاتها فكانوا خير عون لنا علي تطويرها. كما نشكر الأخ الفاضل الأستاذ السيد البدوي محمد أحمد بكلية العلوم بجامعة الكويت لما يبذله من جهد مستمر في طباعة هذه الكتب العلمية باللغة العربية متحلياً بالصبر والأناة لإخراجها بصورة طيبة.

نسأل الله العلي القدير أن يبارك في هذا الجهد المتواضع وأن ينفع به , وأن يسهل لنا جميعاً به طريقاً إلى الجنة، قارئين ودارسين ومعلمين، وأن يجعله من العلم الذي يُنتفع به في حياتنا وبعد موتنا، وأن يجعله في ميزان حسناتنا يوم نلقى الله عز وجل ، "يوم لا ينفع مال ولا بنون إلا من أتى الله بقلب سليم" ، وصلى الله على خير خلقه محمد وعلى آله وصحبه ومن تبعه بإحسان إلى يوم الدين.

# الفصل الأول

## المنطق والبراهين
## Logic and Proofs

**تمهيد**

**يُقصد بالمنطق دراسة السببية / المعقولية (reasoning) ، وهو يتعلق بصورة خاصة بما إذا كانت الأسباب قيد البحث صحيحة (correct) أم لا. فالمنطق يركز على العلاقة (relationship) بين العبارات (statements) المختلفة لا على محتوى (content) أي عبارة معينة. فمثلا تتبع خطوات الحُجَّة (argument) التالية:**

**الأطباء جميعهم يعتادون الصلاة في المسجد.**

**من يعتاد الصلاة في المسجد فهو مؤمن حقا.**

**ولذلك فإن الأطباء جميعهم مؤمنون حقا.**

**فالمنطق لا يفيد هنا في تحديد ما إذا كانت أي من هذه العبارات صحيحة (true) أم لا ، ولكن إذا كانت العبارتان الأوليتان صحيحتين ، فإن المنطق يؤكد (assures) لنا أن العبارة التالية صحيحة أيضا:**

**الأطباء جميعهم مؤمنون حقا.**

**وتستخدم الطرق المنطقية في الرياضيات لبرهنة النظريات ، وفي علم الحاسوب لبرهنة أن البرامج (programs) تؤدي ما نفترض أنها تقوم بتنفيذه. وفي الجزء الأخير من هذا الفصل سنتناول بإذن الله بعض الطرق العامة للبرهنة ، ومن أهمها طريقة "الاستنتاج الرياضي" (mathematical induction) التي تُستخدم كثيرا في الرياضيات وعلم الحاسوب ، وهي مفيدة بصورة خاصة في الرياضيات المتقطعة.**

**تعريف: الدَّعْوَى / الافتراض (proposition)**

**هي جملة (sentence) بحيث تكون إما صحيحة (true) أو خاطئة (false) وليس الاثنين معا.**

**مثال ١-١:**

**أي الجمل** (sentences) **التالية تعد دَعاوَى / افتراضات** (propositions) **؟**

أ) **الأعداد الصحيحة الموجبة** (positive integers) **التي تَقْسِم العدد** 7 **هي** ,1 7 **فقط.**

ب) $1 + 1 = 3$.

ج) **تعد الأرض** (earth) **الكوكب** (planet) **الوحيد الذي عليه حياة** (life) **في هذا الكون** (universe).

د) **لأي عدد صحيح موجب** n **يوجد عدد أولي** (prime number) **أكبر من** n.

هـ) **احرص على التحدث باللغة العربية الفصحى.**

**الحل:**

**الجمل من أ) إلى د) تعد دعاوى / افتراضات وذلك لأن:**

أ) **صحيحة** (true) ، **وهي صيغة أخرى للجملة: العدد** 7 **عدد أولي.**

ب) **خاطئة** (false).

ج) **صحيحة** (true) **أو خاطئة** (false) ، **وليس الاثنين معا ، ولكننا لا ندري الآن أيهما.**

د) **صحيحة** (true) ، **وهي صيغة أخرى للجملة: يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية.**

**بينما الجملة هـ) لا توصف بأنها صحيحة أو خاطئة ، وإنما هي طلب / أمر** (command) ، **وبالتالي فهي ليست دعوى / افتراضا.**

**نلاحظ أن الدعوى / الافتراض عبارة عن جملة تقريرية / إعلانية** (declarative sentence) ، **وهي تقابل جمل الطلب والأمر والسؤال** (question) ، ... **الخ.**

**وسوف نستخدم الحروف الصغيرة** (lowercase letters) **مثل** p, q, r **لتمثيل** (representing) **الافتراضات. كما أننا سنستخدم الاصطلاح** (notation)**:**

$$p: \quad 1 + 1 = 3$$

**لتعريف** p **بأنها الافتراض** $1 + 1 = 3$.

**تعريف:**

**نفرض أن كلاً من** p, q **افتراض.**

**نعرِّف عطف (conjunction) الافتراضين** p, q – **ونرمز له بالاصطلاح** $p \wedge q$ – **بأنه الافتراض:**

p and q

**كما أننا نعرِّف الفَصْل** (disjunction) **بين الافتراضين** p, q – **ونرمز له بالاصطلاح** $p \vee q$ – **بأنه الافتراض:**

p or q

**ويُطلَق على الافتراضات الناتجة من ربط / الجمع بين** (combining) **افتراضين أو أكثر: افتراضات مركبة** (compound propositions).

**مثال ١–٢:**

**نفرض أن**

p:  1 + 1 = 3
q:  A decade is 10 years

**ما هو كل من عطف** p, q **، والفصل بين** p, q **؟**

**الحل:**

**عطف** p, q:

$p \wedge q$ : 1 + 1 = 3 and a decade is 10 years.

**والفصل بين** p, q:

$p \vee q$ : 1 + 1 = 3 or a decade is 10 years.

**ويمكننا أن نصف** (describe) **قيم الصحة** (truth values) **للافتراضات (مثل روابط العطف والفصل) باستخدام جداول الصحة** (truth tables).

**تعريف:**

**جدول الصحة (truth table) لافتراض p** مكون من الافتراضات المفردة $p_1, \cdots, p_n$ (individual propositions) **يتكون من قائمة** (list) **من جميع التوافقات الممكنة** (possible combinations) **لقيم الصحة** (truth values) **للافتراضات** $p_1, \cdots, p_n$ – **حيث** T **تعني** true **و** F **تعني** false – **مع إعطاء قيمة الصحة** (truth value) **للافتراض** p **المقابلة لكل من هذه التوافقات.**

**مثال ١-٣:**

**قيمة الصحة** (truth value) **للافتراض المركب** $p \wedge q$ (compound proposition) **تُعرَّف بجدول الصحة التالي:**

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

**نلاحظ أن العطف** $p \wedge q$ **يكون صحيحا فقط عندما يكون كل من** p, q **صحيحا.**

**مثال ١-٤:**

**ما هي قيمة صحة العطف** $p \wedge q$ **حيث:**

p: $1 + 1 = 3$
q: A decade is 10 years

**الحل:**

**الافتراض** p **خاطئ** (false) ، **والافتراض** q **صحيح** (true). **وبالتالي يكون العطف** $p \wedge q$ **خاطئا** (false).

**مثال ١-٥:**

**قيمة الصحة للافتراض المركب** $p \vee q$ **تُعرَّف بجدول الصحة التالي:**

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

**نلاحظ أن الفصل** $p \vee q$ **يعد صحيحا** (true) **إذا كان** p **أو** q **أو كلاهما صحيحا. وهناك رابط يطلق عليه " أو المتنافية "** (exclusive – or) **(انظر التمرينات) – ويرمز له بالرمز** exor **– بحيث أن الافتراض** p exor q **يعد صحيحا إذا كان** p **أو** q **ولكن ليس كلاهما معا صحيحا.**

**مثال ١-٦:**

**ما هي قيمة صحة الفصل** $p \vee q$ **حيث:**

p: $1 + 1 = 3$.

q:  A decade is 10 years.

**الحل:**

**الافتراض** p **خاطئ** (false) **والافتراض** q **صحيح** (true) ، **وبالتالي يكون الفصل** $p \vee q$ **صحيحا** (true).

**تعريف:**

**نَفْي (negation) الافتراض** p – **ويرمز له بالاصطلاح** $\overline{p}$ – **هو الافتراض:**

not p

**مثال ١-٧:**

**قيمة الصحة للافتراض** $\overline{p}$ **تُعرَّف بجدول الصحة التالي:**

| p | $\overline{p}$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

**مثال ١-٨:**

**نفرض أن**

p:   **أُطلق الاسم " الخوارزمية " نسبة إلى العالم المسلم " الخوارزمي ".**

q:   **تم بناء أول حاسب رقمي الكتروني في القرن العشرين.**

r:   **تم حساب** $\pi$ **لمليون رقم عشري عام ١٩٥٤.**

**المطلوب تمثيل** (representing) **الافتراض التالي باستخدام الرموز** (symbolically) ، **وبَيِّن ما إذا كان صحيحا** (true) **أم خاطئا** (false):

**إما أنه قد أُطلق الاسم " الخوارزمية " نسبة إلى العالم المسلم "الخوارزمي" ، ولم يتم بناء أول حاسب رقمي الكتروني في القرن العشرين أو أنه قد تم حساب** $\pi$ **لمليون رقم عشري عام ١٩٥٤.**

**الحل:**

**يمكن كتابة الافتراض رمزيا** (symbolically) **في الصورة:**

$$(p \wedge \overline{q}) \vee r$$

**ونظرا لأن كلا من** p, q **صحيح** (true) ، **بينما** r **خاطئ** (false) [**حيث أنه قد تم حساب** $\pi$ **لمليون رقم عشري** (1,000,000 decimal digits) **عام ١٩٧٣ ، بينما**

الآن تم حسابها لأكثر من ٢٠٠ بليون رقم عشري]. وإذا استبدلنا بكل رمز (symbol) قيمة الصحة المقابلة ، فإننا نجد أن:

$$\begin{aligned}(p \wedge \overline{q}) \vee r &= (T \wedge \overline{T}) \vee F \\ &= (T \wedge F) \vee F \\ &= F \vee F \\ &= F\end{aligned}$$

أي أن الافتراض المعطَى خاطئ (false).

**الافتراضات الشرطية والتكافؤ المنطقي**

**Conditional Propositions and Logical Equivalence**

**تعريف:**

**إذا كان كل من p, q افتراضا فإن الافتراض المركب**

$$\left.\begin{array}{r}\text{q فإن p إذا كان} \\ \text{if p then q}\end{array}\right\} \qquad (*)$$

**يسمى افتراضا شرطيا (conditional proposition) ، ويرمز له بالاصطلاح**

$$p \rightarrow q$$

**ويطلق على الافتراض** p: **الفرض** (hypothesis) **/ المقدِّمة** (antecedent) ،
**بينما يطلق على الافتراض** q: **النتيجة** (consequent / conclusion).

**مثال ١-٩:**

**نفرض أن لدينا الإعلان / الافتراض التالي:**

**إذا حصل قسم الرياضيات على مبلغ ٢٠,٠٠٠ دينار إضافي فسيقوم بتعيين عضو هيئة تدريس جديد.**

**يمكن وضع هذا الإعلان في الصورة** $p \rightarrow q$

**أي:** (*) if p then q

**حيث:**

p: **قسم الرياضيات يحصل على مبلغ ٢٠,٠٠٠ دينار إضافي.**

q: قسم الرياضيات يقوم بتعيين عضو هيئة تدريس جديد.

وفي هذا المثال الجملة / العبارة p هي الفرض ، والعبارة q هي النتيجة.

ويمكن إعادة صياغة (rephrasing) بعض العبارات التي ليست في الصيغة (*) لتصبح افتراضات شرطية (conditional propositions) كما يوضح ذلك المثال التالي:

**مثال ١-١٠:**

أعد صياغة كل من الافتراضات التالية ليصبح في الصيغة (*) كافتراض شرطي:

أ) صهيب سيكون طالبا ممتازا إذا اجتهد في دراسته.

ب) يمكن للطالب دراسة مقرر الرياضيات المتقطعة فقط إذا درس مقرر الجبر الخطي.

ج) حين تتلو القرآن أحس بطمأنينة في القلب.

د) شرط ضروري (necessary condition) لتخرج الطالب دراسة مقرر الحضارة الإسلامية.

هـ) شرط كافي (sufficient condition) بالنسبة لخديجة للالتحاق بقسم علم الحاسوب الحصول على معدل عام ثلاث نقاط.

**الحل:**

أ) الفرض (hypothesis) هو جزء العبارة الذي يلي " إذا " وبالتالي فصيغة مكافئة (equivalent formulation) للافتراض المعطى هي:

إذا اجتهد صهيب في دراسته فسيكون طالبا ممتازا.

ب) جزء العبارة " فقط إذا " (“only if” clause) هو النتيجة (conclusion) ، أي أن

إذا كان p فإن q

if p then q

تعتبر منطقيا هي نفسها: p فقط إذا كان q

p only if q

وبالتالي فصيغة مكافئة للافتراض المعطى هي:

إذا درس الطالب مقرر الرياضيات المتقطعة فإنه قد درس مقرر الجبر الخطي

لاحظ أن الصيغة: إذا كان p فإن q

if p then q

تؤكد الفرض (emphasizes the hypothesis) ، بينما الصيغة:

p فقط إذا كان q

p only if q

تؤكد النتيجة (emphasizes the conclusion). فالفارق بين الصيغتين هو مجرد أسلوب عرض الشرط (stylistic).

ج) كلمة " حين " (when) تفيد معنى " إذا " (if) نفسه ، ولذلك فصيغة مكافئة هي:

إذا تلوتَ القرآن أحسستُ بطمأنينة في القلب.

د) النتيجة (conclusion) تعبر عن (expresses) شرط ضروري (necessary condition) ، ولذلك فإن صيغة مكافئة هي:

إذا تخرج الطالب فإنه قد درس مقرر الحضارة الإسلامية

هـ) الفرض (hypothesis) يعبر عن شرط كافي (sufficient condition) ، ولذلك فيمكننا كتابة الصيغة المكافئة:

إذا حصلت خديجة على معدل عام ثلاث نقاط فستلتحق بقسم علم الحاسوب

**قيمة الصحة للافتراض الشرطي $p \to q$**

نفرض أن لدينا الافتراض الشرطي المذكور في مثال ١-٩. من الواضح أنه إذا كان p صحيحا (أي حصل قسم الرياضيات على مبلغ ٢٠,٠٠٠ دينار إضافي) وكان q أيضا صحيحا (أي تم تعيين عضو هيئة تدريس جديد بالقسم) فإن الافتراض الشرطي $p \to q$ يكون صحيحا. بينما إذا كان p صحيحا و q خاطئا (أي حصل القسم على المبلغ الإضافي ولم يتم تعيين عضو هيئة تدريس جديد) فإن الافتراض الشرطي يكون خاطئا. أما إذا كان الفرض p خاطئا (أي لم يحصل قسم الرياضيات على المبلغ الإضافي ٢٠,٠٠٠ دينار) فلن نعتبر الافتراض الشرطي $p \to q$ خاطئا ، وذلك لأن الفرض p لم يتحقق ، ولكن الافتراض الشرطي $p \to q$ – كأي افتراض

(proposition) – يجب أن تكون له قيمة صحة. ولذلك فإننا – تعريفا (by definition) – نقول إن الافتراض الشرطي يكون صحيحا في هذه الحالة (أي عندما يكون p خاطئا). وبناءً عليه فإننا نلخص ما سبق في التعريف التالي:

**تعريف قيمة الصحة للافتراض الشرطي $p \to q$**

**Definition of the truth value of the conditional proposition** $p \to q$

**نعرِّف قيمة الصحة للافتراض الشرطي $p \to q$ بجدول الصحة التالي:**

| p | q | $p \to q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

**مثال ١-١١:**

**نفرض أن**

p: 1 > 2,  q: 4 < 8

**ما هي قيمة الصحة لكل من** $p \to q$ , $q \to p$ ؟

**الحل:**

p: **خاطئ** ، q: **صحيح**

**ولذلك فإن** $p \to q$ : **صحيح**

$q \to p$ : **خاطئ**

**مثال ١-١٢:**

**نفرض أن**

p: true,  q: false,  r: true

**ما هي قيمة صحة كل من الافتراضات التالية ؟**

i) $(p \wedge q) \to r$

ii) $(p \vee q) \to \bar{r}$

iii) $p \wedge (q \to r)$

iv) $p \to (q \to r)$

**الحل:**

نستبدل بكل رمز من الرموز $p, q, r$ (symbols) قيمة الصحة (truth value) الخاصة به ، وذلك للحصول على قيمة الصحة للافتراض:

i) $(T \wedge F) \to T \;=\; F \to T = \text{true}$

ii) $(T \vee F) \to \overline{T} \;=\; T \to F = \text{false}$

iii) $T \wedge (F \to T) \;=\; T \wedge T = \text{true}$

iv) $T \to (F \to T) \;=\; T \to T = \text{true}$

**ملاحظة:**

في اللغة المعتادة يكون الفرض والنتيجة في أي افتراض شرطي مرتبطين عادة (normally related). بينما في المنطق (logic) ليس من الضروري أن يشير كل من الفرض والنتيجة في الافتراض الشرطي إلى موضوع بعينه ، أي لا يشترط أن يكون هناك أي ارتباط أو علاقة بين الفرض والنتيجة. فمثلا في المنطق يُسمح بافتراض مثل:

If 5 < 3 then Cordova was capital of Andalusia.

أو

If 5 < 3 then Granada was capital of Andalusia.

فالمنطق يهتم بصيغة (form) أي افتراض ، والعلاقات (relations) بين الافتراضات ، ولا يهتم بموضوع الافتراض نفسه. [مثلا في الافتراضين الشرطيين السابقين نظراً لأن الفرض $5 < 3$ خاطئ فالافتراضان صحيحان]. ولاحظ أن هناك فارقا / اختلافا (difference) بين الافتراض الشرطي الصحيح (true conditional proposition) والافتراض الشرطي ذي النتيجة الصحيحة (true conclusion).

ونلاحظ من مثال ١-١١ أن الافتراض $p \to q$ يمكن أن يكون صحيحا بينما الافتراض $q \to p$ خاطئ. ويُطلَق على الافتراض $q \to p$ **عَكْس (converse)** الافتراض $p \to q$. أي أنه يمكن لافتراض شرطي أن يكون صحيحا بينما عكسه خاطئ.

**مثال ١-١٣:**

لكل من الافتراضين الشرطيين التاليين:

- اكتب الافتراض الشرطي باستخدام الرموز (symbolically).

▪ اكتب عكس (converse) كل عبارة باستخدام الرموز وبالكلمات (in words).

▪ أوجد قيمة الصحة للافتراض الشرطي وعكسه.

i) If $1 < 2$, then $3 < 6$.
ii) If $1 > 2$, then $3 < 6$.

**الحل:**

(i) نفرض

p: $1 < 2$, q: $3 < 6$

العبارة المعطاة يمكن أن تُكتب رمزيا في الصيغة $p \to q$

ونظرا لأن كلا من p, q صحيح فالعبارة أيضا صحيحة

عكس العبارة بالرموز: $q \to p$

عكس العبارة بالكلمات: If $3 < 6$, then $1 < 2$

ونظرا لأن كلا من p, q صحيح ، فالعكس $q \to p$ صحيح.

(ii) نفرض

p: $1 > 2$, q: $3 < 6$

الصيغة الرمزية للعبارة المعطاة $p \to q$

ونظرا لأن p خاطئ و q صحيح فالعبارة المعطاة صحيحة.

عكس العبارة بالرموز: $q \to p$

عكس العبارة بالكلمات: If $3 < 6$, then $1 > 2$

ونظرا لأن q صحيح وp خاطئ ، فالعكس $q \to p$ خاطئ.

ومن الافتراضات المركبة المفيدة الافتراض

p إذا وفقط إذا q

p if and only if q

وتُكتب بالصيغة المختصرة

p iff q

وتعتبر هذه العبارة صحيحة فقط عندما يكون لكل من p, q قيمة الصحة نفسها (أي عندما يكون p, q صحيحين معا ، أو خاطئين معا).

**تعريف:**

نفرض أن p, q افتراضان. الافتراض المركب

p إذا وفقط إذا q

p if and only if q

يطلق عليه " **افتراض ثنائي الشرط** " (**biconditional proposition**) ، ويرمز له بالاصطلاح

$$p \leftrightarrow q$$

وتُعرَّف قيمة الصحة للافتراض $p \leftrightarrow q$ بجدول الصحة التالي:

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

ويمكن صياغة العبارة " p if and only if q " بالصيغة البديلة التالية:

p شرط ضروري وكافي لـ q

" p is a necessary and sufficient condition for q "

**مثال ١-١٤:**

العبارة

$$1 < 5 \ \text{iff} \ 2 < 8$$

يمكن كتابتها بالصيغة الرمزية

$$p \leftrightarrow q$$

إذا عَرَّفنا

$$p: \ 1 < 5, \quad q: \ 2 < 8.$$

ونظراً لأن كلا من p, q صحيح ، فإن العبارة $p \leftrightarrow q$ تكون صحيحة.

وكطريقة أخرى لصياغة العبارة المعطاة في مثال ١-١٤ يمكننا أن نكتبها في الصيغة التالية:

شرط ضروري وكافي لـ $1 < 5$ هو أن تكون $2 < 8$

وفي بعض الأحيان يكون لافتراضين مركبين مختلفين قيم الصحة نفسها بغض النظر عن قيم الصحة للافتراضات المكوِّنة لهما (constituent propositions). يقال لمثل هذين الافتراضين إنهما متكافئان منطقيا.

**تعريف:**

نفرض أن الافتراضين المركبين $P, Q$ (compound propositions) مكونان من الافتراضات $p_1, \cdots, p_n$. يُقال إن $P, \quad Q$ **متكافئان منطقيا (logically equivalent)** ويستخدم لذلك الاصطلاح

$$P \equiv Q$$

إذا كان $P, \quad Q$ صحيحين معا أو خاطئين معا لأي قيم صحة معطاة للافتراضات $p_1, \cdots, p_n$.

**مثال ١-١٥:**

**قوانين دي مورجان للمنطق**

حقِّق باستخدام جداول الصحة قانوني دي مورجان:

(أ) $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$

(ب) $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$

**الحل:**

سنثبت بإذن الله القانون (أ) ، ونترك إثبات القانون (ب) كتدريب للقارئ (وهو موجود في التمرينات).

بكتابة جدولي الصحة لكل من $P \equiv \overline{p \vee q}, \quad Q \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$

سنتحقق من أنه لأي قيم صحة معطاة لـ $p, q$ فإن $P, Q$ سيكونان إما صحيحين معا أو خاطئين معا.

| $p$ | $q$ | $\overline{p \vee q}$ | $\overline{p} \wedge \overline{q}$ |
|---|---|---|---|
| T | T | F | F |
| T | F | F | F |
| F | T | F | F |
| F | F | T | T |

وهكذا نرى أن $P, Q$ متكافئان منطقيا.

المثال التالي يعطي صيغة مكافئة منطقيا لنفي (negation) $p \to q$.

**مثال ١-١٦:**

اثبت أن نَفْي $p \to q$ يكافئ منطقيا $p \wedge \overline{q}$.

**الحل:**

المطلوب إثبات أن

$$\overline{p \rightarrow q} \equiv p \wedge \overline{q}$$

**بكتابة جدولي الصحة للافتراضين** $Q = p \wedge \overline{q}$ , $P = \overline{p \rightarrow q}$ **يمكننا التحقق من أننا إذا أُعطينا أي قيم صحة للافتراضين** $p, q$ **فإن** $P, Q$ **يكونان إما صحيحين معا أو خاطئين معا:**

| $p$ | $q$ | $\overline{p \rightarrow q}$ | $p \wedge \overline{q}$ |
|---|---|---|---|
| T | T | F | F |
| T | F | T | T |
| F | T | F | F |
| F | F | F | F |

**من جدولي الصحة يتبين لنا أن** $P, Q$ **متكافئان منطقيا.**

**مثال ١-١٧:**

**اثبت علاقة التكافؤ المنطقي**

$$p \rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$$

**الحل:**

**يمكننا إثبات هذه العلاقة بكتابة جدولي الصحة للافتراضين** $Q = \overline{p} \wedge q$ , $P = p \rightarrow q$ **. ويمكننا كذلك إثباتها بتطبيق قوانين دي مورجان (مثال ١-١٥) كما يلي:**

**نعلم من مثال ١-١٦ أن**

$$\overline{p \rightarrow q} \equiv p \wedge \overline{q}$$

**وبنفي طرفي التكافؤ وتطبيق قوانين دي مورجان نحصل على:**

$$p \rightarrow q \equiv \overline{p \wedge \overline{q}} \equiv \overline{p} \vee q$$

**والآن نثبت أنه بناء على تعريفاتنا فإن** $p \leftrightarrow q$ **تكافئ منطقيا** $q \rightarrow p$ and $p \rightarrow q$.

**مثال ١-١٨:**

**اثبت باستخدام جدول الصحة التكافؤ المنطقي**

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

**الحل:**

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ |
|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | F |
| F | T | F | T | F | F |
| F | F | T | T | T | T |

**تعريف: المكـــافئ العكســـي (contrapositive) / مناقلـــة / مـــدوَّر (transposition) الافــتراض الشــرطي $p \to q$ هــو الافــتراض $\overline{q} \to \overline{p}$.**

**ولاحظ أن هناك فارقا بين المكافئ العكسي والعكس** (converse)**. فعكس أي افـتراض شـرطي هـو مجـرد عكـس** (reversing) **دَوْرَيْ** $p,\ q$ **، بينمـا مكافئـه العكسي يعكس دوري** $p, q$ **وينفي كلا منهما.**

**مثال ١-١٩:**

**اكتب الافتراض**

If $1 < 4$, then $5 > 8$

**باستخدام الرموز** (symbolically)**. ثم اكتب كلا من عكسه ومكافئه العكسي بالرموز وبالكلمات. وأوجد قيمة الصحة لكل افتراض.**

**الحل:**

**نفرض**

p: $1 < 4$, q: $5 > 8$

**الافتراض المعطي يمكن كتابته رمزيا:** $p \to q$

**العكس** (converse) **بالرموز:** $q \to p$

**وبالكلمات :** If $5 > 8$, then $1 < 4$

**المكافئ العكسي** (contrapositive) **بالرموز:** $\overline{q} \to \overline{p}$

**وبالكلمات:** If $5 \not> 8$ then $1 \not< 4$ ,

**نلاحظ أن**

$p \to q$ : **خاطئ**

$q \to p$ : **صحيح**

$\overline{q} \to \overline{p}$ : **خاطئ**

**نظرية ١-١:**

**الافتراض الشرطي** $p \rightarrow q$ **ومكافئه العكسي** $\overline{q} \rightarrow \overline{p}$ **متكافئان منطقيا.**

**البرهان:**

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $\overline{q} \rightarrow \overline{p}$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | F | F |
| F | T | T | T |
| F | F | T | T |

**من جدول الصحة يتحقق لنا التكافؤ المنطقي المطلوب.**

## أنواع الافتراضات Types of Propositions

**(١) المَصْدوقة (Tautology):**

**الافتراض الذي يكون دائما صادقا** (true) **بغض النظر عن قيم صحة** (truth values) **الافتراضات المكوِّنة له** (component propositions) **يطلق عليه "مصدوقة". مثلا الافتراض** $P \vee \overline{P}$ **يكون دائما صادقا بغض النظر عن قيمة** P.

**(٢) التناقض (Contradiction):**

**الافتراض الذي يكون دائما خاطئا** (false) **بغض النظر عن قيم صحة الافتراضات المكوِّنة له يُطلق عليه " تناقضا " ، مثل الافتراض** $P \wedge \overline{P}$ .

**(٣) الاتفاق / الصدفة (Contingency):**

**الافتراض الذي ليس مصدوقة ولا تناقضا يطلق عليه " اتفاقا " /" صدفة " / " توافقا " ، مثل الافتراض** $P \vee Q$ .

**ونلاحظ أن أي قاعدة استدلال** (inference rule) **[وهي قاعدة مبنية على ما يُعرف بالمتطابقات** (identities) **والاقتضاءات** (implications)**] هي مصدوقة ، كما سنرى بإذن الله فيما يلي.**

## المتطابقات
## Identities

يمكننا باستخدام تعريفات / معاني أدوات الربط (أدوات الوصل) (connectives) استنتاج (deriving) عدد من العلاقات (relations) بين الافتراضات تفيدنا كثيرا في موضوع الاستنباط المنطقي (logical reasoning) [وهو عملية استخلاص نتائج (conclusions) من مقدمات منطقية (premises) باستخدام قواعد استدلال]. وفيما يلي مجموعة من أزواج (pairs) من افتراضات متكافئة منطقيا (logically equivalent propositions) نقابلها كثيرا في دراسة المنطق ، ويُطلق عليها أيضا " متطابقات " (identities). وكثير من هذه المتطابقات نستخدمها في حياتنا اليومية. وإذا كان هناك افتراضان متكافئان منطقيا فإنه يمكننا استبدال أحدهما بالآخر في أي افتراض يشتمل على أي منهما دون تغيير القيمة المنطقية لهذا الافتراض الذي يشتمل على أي منهما. وفيما يلي سنستخدم الرمز $\Leftrightarrow$ للدلالة على أن التكافؤ (equivalence) دائما صحيح (أي أن الافتراض مصدوقة). ويمكن التحقق من صحة أي من هذه التكافؤات بتكوين جداول الصحة. وسنبدأ بسرد هذه المجموعة من المتطابقات ثم نعقبها بأمثلة لتوضيح معانيها:

قائمة متطابقات (List of Identities):

١. جمود أداة الربط $\vee$ (idempotence of the connective)

1. $P \Leftrightarrow (P \vee P)$

٢. جمود أداة الربط $\wedge$ (idempotence of the connective)

2. $P \Leftrightarrow (P \wedge P)$

٣. تبادلية أداة الربط $\vee$ (commutativity of)

3. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$

٤. تبادلية أداة الربط $\wedge$ (commutativity of)

4. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$

٥. تجميعية أداة الربط $\vee$ (associativity of)

5. $[(P \vee Q) \vee R] \Leftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$

٦. تجميعية أداة الربط $\wedge$ (associativity of)

6. $[(P \wedge Q) \wedge R] \Leftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$

٧. قانون دي مورجان (DeMorgan's Law)

7. $(\overline{P \vee Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})]$

٨. قانون دي مورجان (DeMorgan's Law)

8. $(\overline{P \wedge Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})]$

٩. توزيعية أداة الربط $\wedge$ على أداة الربط $\vee$ (distributivity of $\wedge$ over $\vee$)

9. $[P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$

١٠. توزيعية أداة الربط $\vee$ على أداة الربط $\wedge$ (distributivity of $\vee$ over $\wedge$)

10. $[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$

١١.

11. $(P \vee \text{True}) \Leftrightarrow \text{True}$

١٢.

12. $(P \wedge \text{False}) \Leftrightarrow \text{False}$

١٣.

13. $(P \vee \text{False}) \Leftrightarrow P$

١٤.

14. $(P \wedge \text{True}) \Leftrightarrow P$

١٥.

15. $(P \vee \overline{P}) \Leftrightarrow \text{True}$

١٦.

16. $(P \wedge \overline{P}) \Leftrightarrow \text{False}$

١٧. النفي المضاعَف (double negation)

17. $P \Leftrightarrow (\overline{\overline{P}})$

١٨. الاقتضاء (implication)

18. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$

١٩. التكافؤ (equivalence)

19. $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$

**٢٠. التصدير** (exportation)

20. $[(P \wedge Q) \rightarrow R] \Leftrightarrow [P \rightarrow (Q \rightarrow R)]$

**٢١. الخُلْف / الخلاف** (absurdity)

21. $[(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \overline{Q})] \Leftrightarrow \overline{P}$

**٢٢. التكافؤ العكسي** (contrapositivity)

22. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \rightarrow \overline{P})$

**ملاحظة:**

**الرمز** $\Leftrightarrow$ **يعني أن التكافؤ** (equivalence) **دائما صحيح** (true) **[أي أنه "مصدوقة"** (tautology)**] بينما الرمز** $\leftrightarrow$ **يعني أن التكافؤ قد يكون خاطئا** (false) **في بعض الحالات (أي أنه عموما "اتفاق / صدفة"** (contingency)**)].**

**أمثلة على قائمة المتطابقات:**

**فيما يلي أمثلة توضح معاني المتطابقات الواردة في هذه القائمة.**

١) $P \Leftrightarrow (P \vee P)$

**معنى هذه المتطابقة أن افتراضا مثل "الصدقة برهان" يكافئ الافتراض "الصدقة برهان أو الصدقة برهان". وهذه المتطابقة – وكذلك التي تليها – نادرا ما تستخدم في حياتنا اليومية ، ولكنها والتي تليها تفيدان في معالجة الافتراضات** (manipulating propositions) **عند الاستنباط** (reasoning) **باستخدام الصيغ الرمزية** (symbolic forms).

٢) $P \Leftrightarrow (P \wedge P)$

**شبيهة بما قبلها.**

٣) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$

**معنى هذه المتطابقة أن افتراضا مثل " ننتظر النصر أو (ننتظر) الشهادة " يكافئ الافتراض " ننتظر الشهادة أو (ننتظر) النصر ".**

٤) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$

معنى هذه المتطابقة أن افتراضا مثل " القرآن يهدي للتي هي أقوم و(القرآن) يشفع لأصحابه يوم القيامة " يكافئ الافتراض " القرآن يشفع لأصحابه يوم القيامة و(القرآن) يهدي للتي هي أقوم ".

٥) $[(P \vee Q) \vee R] \Leftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$

معنى هذه المتطابقة أن افتراضا مثل " حذيفة غني أو (حذيفة) جواد أو هو أيضا سعيد " يكافئ الافتراض "حذيفة غني أو هو أيضا جواد أو (هو) سعيد".

٦) $[(P \wedge Q) \wedge R] \Leftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$

شبيهة بما قبلها.

٧) $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$

معنى هذه المتطابقة أن افتراضا مثل " ليس الحال أنَّ أشعب غني أو كريم " يكافئ الافتراض " أشعب ليس غنيا وهو ليس كريما ".

٨) $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$

معني هذه المتطابقة أن افتراضا مثل " ليس الحال أن أشعب غني وكريم " يكافئ الافتراض " أشعب ليس غنيا أو هو ليس كريما ".

٩) $[P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$

معنى هذه المتطابقة أن افتراضا مثل " عمرو غني وهو جواد أو (هو) سعيد " يكافئ الافتراض " عمرو غني و(هو) جواد ، أو عمرو غني و(هو) سعيد ".

١٠) $[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$

شبيهة بما قبلها ، ومعناها أن افتراضا مثل " عمرو غني أو هو جواد و(هو) سعيد " يكافئ الافتراض " عمرو غني أو (هو) جواد ، وعمرو غني أو (هو) سعيد ".

١١) $(P \vee \text{True}) \Leftrightarrow \text{True}$

هنا True عبارة عن افتراض يكون دائما صحيحا. وبالتالي فإن الافتراض $(P \vee \text{True})$ يكون دائما صحيحا بغض النظر عن قيمة P. وهذا الافتراض $(P \vee \text{True})$ نادرا ما يستخدم في حياتنا اليومية.

١٢ ، ١٣ ، ١٤) هذه الافتراضات شبيهة بالافتراض السابق (١١) ، وهي جميعها – مثل (١١) – نادرا ما تستخدم في حياتنا اليومية ، ولكنها تفيد في معالجة الافتراضات عند الاستنباط بالصيغ الرمزية.

١٥) $(P \vee \overline{P}) \Leftrightarrow \text{True}$

معنى هذه المتطابقة أن افتراضا مثل " بلال طوله ٦ أقدام أو أن طوله ليس ٦ أقدام " يكون دائما صحيحا.

١٦) $(P \wedge \overline{P}) \Leftrightarrow \text{False}$

معنى هذه المتطابقة أن افتراضا مثل " بلال طوله ٦ أقدام وطوله ليس ٦ أقدام " يكون دائما خاطئا.

١٧) $P \Leftrightarrow \overline{(\overline{P})}$

معنى هذه المتطابقة أن افتراضا مثل " ليس الحال أن بلالا طوله ليس ٦ أقدام " يكافئ الافتراض " بلال طوله ٦ أقدام ".

١٨) $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$

معنى هذه المتطابقة أن افتراضا (أو وَعْداً من شخص ما) مثل: " إذا حصلتُ على الجائزة فسأعطيك ألف دينار " يكافئ الافتراض " إما أنني لا أحصل على الجائزة أو أنني أعطيك ألف دينار ". ويمكن إدراك هذا التكافؤ برؤية أن الافتراض الأول [الوَعْد من الشخص: " إذا حصلت ... "] يكون خاطئا (أي يكون الشخص كاذبا في وعده) في حالة واحدة فقط ، وهي إذا حصل هذا الشخص على الجائزة ولم يعطني الألف دينار ، بينما يكون الافتراض صحيحا (أي يكون الشخص صادقا في وعده) في جميع الحالات الأخرى. كذلك يكون الافتراض الثاني (" إما أنني ... ") خاطئا في حالة واحدة فقط وهي إذا حصل الشخص على الجائزة ولم يعطني الألف دينار ، بينما يكون الافتراض صحيحا في جميع الحالات الأخرى. وهكذا فإن الافتراضين (الأول والثاني) متكافئان منطقيا (logically equivalent).

١٩) $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$

معنى هذه المتطابقة أن افتراضا مثل: " سَلْمان مؤمن إذا وفقط إذا كان مجاهدا " يكافئ منطقيا الافتراض " إذا كان سلمان مؤمنا فإنه مجاهد ، وإذا كان سلمان مجاهدا فإنه مؤمن ".

٢٠) $[(P \wedge Q) \rightarrow R] \Leftrightarrow [P \rightarrow (Q \rightarrow R)]$

معنى هذه المتطابقة أن افتراضا مثل: " إذا آمنتَ وعَمِلْتَ صالحا فستحيا حياة طيبة " يكافئ منطقيا الافتراض: " إذا آمنتَ فإنك إذا عَمِلْتَ صالحا فستحيا حياة طيبة ".

٢١) $[(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \overline{Q})] \Leftrightarrow \overline{P}$

معنى هذه المتطابقة أنه إذا كان لدينا افتراضان مثل: " إذا كان أيمن مذنبا فمن المؤكد أنه كان موجودا في هذه الساحة " و " إذا كان أيمن مذنبا فمن المستحيل أنه كان موجودا في هذه الساحة ". وكان الافتراضان صحيحين (true) معا ، فيلزم وجود خطأ ما (something wrong) في الفرض (assumption) أن أيمن مذنب.

٢٢) $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \rightarrow \overline{P})$

معنى هذه المتطابقة أن افتراضا مثل: " إذا كان المرء مؤمنا حقا فإنه يكون صادقا " يكافئ منطقيا الافتراض: " إذا لم يكن المرء صادقا فإنه ليس مؤمنا حقا.

### مبدأ الثَّنَوية / الثنائية / الازدواجية (Duality Principle)

نلاحظ أن المتطابقات من ١ إلى ١٦ يمكن أن ترتب مثنى مثنى في ثنائيات / أزواج (pairs) [(٢،١) ، (٤،٣) ... ، (١٦،١٥)] باستخدام علاقة التنوية (duality relation) – التي ستعرف فيما يلي – ويقال إن كلا من ١ ، ٢ ثنوي / ثنائي / مرافق (dual) للآخر ، وكذلك كل من ٣ ، ٤ ثنوي للآخر ، وهكذا ... وبالتالي فإذا كنا نعلم أحد الثنائيين في زوج ما ، فإنه يمكننا الحصول على الثنائي الآخر المرافق باستخدام مبدأ التنوية (duality).

### ثنائي / ثنوي / مرافق الافتراض (Dual of a Proposition)

نفرض أن $X$ افتراض يشتمل على أدوات الربط / أدوات الوصل / الرابطات / الآصرات (connectives): $\vee, \wedge, \bar{}$ فقط. ونفرض أن $X^*$ هو الافتراض الذي نحصل عليه من $X$ بوضع $\wedge$ بدلا من $\vee$ ، و $\vee$ بدلا من $\wedge$ ، و $T$ بدلا من $F$ ، و $F$ بدلا من $T$. الافتراض $X^*$ يطلق عليه ثنوي / ثنائي / مرافق $X$ (dual of).

مثلا مرافق $[P \wedge Q] \vee P$ هو $[P \vee Q] \wedge P$

ومرافق $[\overline{P} \wedge Q] \vee \overline{[T \wedge \overline{R}]}$ هو $[\overline{P} \vee Q] \wedge \overline{[F \vee \overline{R}]}$

**خاصية الثنوية (في تكافؤ الافتراضات) Property of Duality**

إذا كان الافتراضان $P, Q$ [اللذان يحتويان على أدوات الربط $\vee, \wedge, \bar{}$ فقط] متكافئين (equivalent) ، فإن مرافقيهما $P^*, Q^*$ (their duals) أيضا متكافئان.

**استخدام المتطابقات Use of Identities**

فيما يلي مثالان يوضحان كيفية استخدام المتطابقات في إثبات بعض النتائج.

مثال ١-٢٠:

اثبت صحة العلاقة

$$\overline{(P \rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$$

الحل:

$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$ [المتطابقة ١٨: الاقتضاء]

$\overline{(P \rightarrow Q)} \Leftrightarrow \overline{(\overline{P} \vee Q)}$

$\overline{(P \rightarrow Q)} \Leftrightarrow (\overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q})$ [باستخدام المتطابقة ٧: قانون دي مورجان]

$\overline{(P \rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$ [باستخدام المتطابقة ١٧: النفي المضاعف]

ملاحظة:

معنى علاقة التكافؤ في مثال ١-٢٠ أن نفي " if P then Q " هو " P but not Q ". مثلا إذا قال شخص لولده: " إذا نجحت بتقدير امتياز فسأعطيك عشرين دينارا " فمتى يكون هذا الشخص قد أخلف وعده وكُتبت عليه كذبة ؟

الجواب: حين ينجح ولده بتقدير امتياز (أي تحقق P) ولكنه لم يعطه العشرين دينارا (أي لم يتحقق Q).

مثال ١-٢١:

اثبت صحة العلاقة التالية المعروفة باسم قانون الامتصاص:

الامتصاص (absorption) $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

الحل:

من المتطابقة ١٤: $P \Leftrightarrow (P \wedge T)$

وبالتالي فإن:

$$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge T) \vee (P \wedge Q)$$

$\Leftrightarrow P \wedge (T \vee Q)$ (باستخدام المتطابقة ٩: القانون التوزيعي)

$\Leftrightarrow P \wedge T$ (باستخدام المتطابقة ١١ مع التبادلية في المتطابقة ٣)

$\Leftrightarrow P$ (باستخدام المتطابقة ١٤)

ملاحظة:

قانون الامتصاص المذكور في هذا المثال يفيدنا بأنه يمكن تبسيط (simplifying) $P \vee (P \wedge Q)$ إلى P ، أو إن كان ضروريا فيمكن بسط (expanding) P إلى $P \vee (P \wedge Q)$.

## المُسَوِّرات

## Quantifiers

المنطق الذي درسناه حتى الآن والذي يتعلق بالافتراضات لا يمكنه وصف معظم عبارات الرياضيات وعلم الحاسوب. فمثلا العبارة

p: n عدد صحيح فردي

(n is an odd integer)

ليست افتراضا لأن كَوْن p صحيحا أو خاطئا يعتمد على قيمة n. فمثلا إذا كانت n = 13 فإن p صحيح ، بينما إذا كانت n = 8 فإن p خاطئ. ونظرا لأن معظم عبارات الرياضيات وعلم الحاسوب تستخدم متغيرات ، فلذلك يجب توسيع نظام المنطق (system of logic) ليشمل مثل هذه العبارات.

**تعريف:**

نفرض أن P(x): عبارة تشتمل على المتغير x. ونفرض أن D: مجموعة (set). يُقال إن P **دالة افتراضية (propositional function)** (بالنسبة للمجموعة D). P(x) تكون افتراضا (proposition). ويُقال إن D هي مجال تطبيق / مجال الحديث عن P (domain of discourse of P).

**مثال ١-٢٢:**

نفرض أن P(n) هي العبارة

n عدد صحيح فردي

(n is an odd integer)

ونفرض أن D هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (set of positive integers). نلاحظ أن P دالة افتراضية ، ومجال تطبيقها D ، وذلك لأنه لأي n في D فإن P(n) يكون افتراضا (أي أنه لأي n في D يكون P(n) صحيحا أو خاطئا وليس الاثنين معا). مثلا:

عندما n = 1 نحصل على الافتراض: 1 عدد صحيح فردي ، وهو صحيح. وعندما n = 2 نحصل على الافتراض: 2 عدد صحيح فردي ، وهو خاطئ. وهكذا ...

وتجدر الإشارة إلى أن الدالة الافتراضية P ليست نفسها صحيحة (true) أو خاطئة (false) ، ولكن لكل x في مجال تطبيقها فإن P(x) تُعد افتراضا (وبالتالي صحيحا أو خاطئا). ويمكننا أن ننظر إلى أي دالة افتراضية على أنها تعرِّف صنفا / فئة / طبقة من الافتراضات (class of propositions) ، افتراضا واحدا لكل عنصر من عناصر مجال تطبيقها. فمثلا إذا كانت P دالة افتراضية مجال تطبيقها يساوي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة فإننا نحصل على طبقة الافتراضات

$P(1), P(2), \ldots$

وكل من ... ,P(1), P(2) إما صحيح أو خاطئ.

مثال ١-٢٣:

فيما يلي مثالان للدوال الافتراضية

(أ) $n^2 + 2n$ عدد صحيح فردي

(مجال التطبيق = مجموعة الأعداد الحقيقية)

(ب) $x^2 - x - 6 = 0$

(مجال التطبيق = مجموعة الأعداد الحقيقية)

بالنسبة للعبارة (أ): لكل عدد صحيح موجب n نحصل على افتراض ، ولذلك فالعبارة (أ) تمثل دالة افتراضية. وكذلك بالنسبة للعبارة (ب): لكل عدد حقيقي x نحصل على افتراض ، ولذلك فإن (ب) تمثل دالة افتراضية.

ونظراً لأن معظم العبارات في الرياضيات وعلم الحاسوب تستخدم تعبيرات مثل: " لكل ... " ، " لأي ... " ، " لبعض ... "

“ for every ... “ , “ for each ... “ , “ for some ... “ , ...

كالعبارتين:

لأي مثلث T مجموع زوايا T يساوي ١٨٠°.

لبعض البرامج P مخرجات P هي P نفسه.

فلذلك سنقوم فيما يلي بتوسيع النظام المنطقي ليشمل عبارات تستخدم التعبيرات المشار إليها " لكل ... " ، " لأي ... " ، " لبعض ... " .

تعريف:

نفرض أن P دالة افتراضية مجال تطبيقها D. يُقال إن العبارة:

$P(x)$ لجميع x / $P(x)$ لكل x / $P(x)$ لأي x

for any x, P(x) / for all x, P(x) / for every x, P(x)

" عبارة مسوّرة شموليا / تسويراً شاملاً (universally quantified statement). وسنستخدم الرمز $\forall$ ليعني " لجميع / لكل / لأي " (for any / for all / for every) ، ولذلك سنكتب العبارة السابقة في الصورة

$$\forall x \quad P(x)$$

ويُطلق على الرمز $\forall$ : " مسوّر شامل " (universal quantifier). وتكون العبارة $\forall x \quad P(x)$ صحيحة إذا كان $P(x)$ صحيحا لجميع العناصر x في D. بينما تكون العبارة خاطئة إذا كان $P(x)$ خاطئا على الأقل لعنصر واحد x في D. وإذا وُجدت قيمة x تجعل $P(x)$ خاطئا فإن هذه القيمة يطلق عليها " مثال مناقض / مضاد " (counterexample) للعبارة: $\forall x \quad P(x)$ .

أما العبارة:

$P(x)$ لبعض قيم x / $P(x)$ على الأقل لعنصر واحد x / يوجد عنصر x بحيث أن $P(x)$

there exists x such that, P(x) / for at least one x, P(x) / for some x, P(x)

فيقال إنها " عبارة مسوَّرة وجوديا " (existentially quantified statement). وسنستخدم الرمز $\exists$ ليعني " لبعض " (for some)/ " يوجد " (there exist) / لعنصر واحد على الأقل (for at least one). وبالتالي فالعبارة السابقة نكتبها في الصورة

$$\exists x \quad P(x)$$

ويُطلق على الرمز $\exists$ " مسوّر وجودي " (existential quantifier) وتكون العبارة

$$\exists x \quad P(x)$$

صحيحة إذا كان $P(x)$ صحيحا على الأقل لعنصر واحد x في D. بينما تكون العبارة خاطئة إذا كان $P(x)$ خاطئا لجميع العناصر x في D.

ويسمى المتغير x في الدالة الافتراضية $P(x)$ " متغيرا حرا " (a free variable) (أي حرا في أن يتنقل خلال مجال التطبيق) ، بينما يسمى المتغير x

**في العبــارة المســوّرة شموليــا** $\forall x \quad P(x)$ **أو في العبــارة المســوّرة وجوديــا** $\exists x \quad P(x)$ **" متغيرا مقيَّدا " (bound variable)** (أي مقيَّدا بالمسوّر $\forall$ أو $\exists$).

**ذكرنا سابقا أن الدالة الافتراضية ليس لها قيمة صحة ، بينما نلاحظ من التعريف السابق أنه يعطي قيمة صحة لكل من العبارتين المسوّرتين:**

$$\forall x \quad P(x) \qquad \& \qquad \exists x \quad P(x)$$

**أي أن العبارة التي تحتوي على متغيرات حرة (غير مسوّرة) لا تُعد افتراضا ، بينما العبارة التي لا تحتوي على متغيرات حرة تعد افتراضا.**

**ملاحظة:**

**أحيانا لتحديد مجال التطبيق** D (domain of discourse) **نكتب العبارة المسوَّرة شموليا في الصيغة**

$$\forall \ x \text{ in } D, \quad P(x)$$

**والعبارة المسوَّرة وجوديا في الصيغة**

$$\exists \ x \text{ in } D, \quad P(x)$$

**مثال ١-٢٤:**

**العبارة**

**لأي عدد حقيقي** x $x^2 \geq 0$

for every real number x, $x^2 \geq 0$

**تعد عبارة مسوّرة شموليا. ومجال التطبيق هو مجموعة الأعداد الحقيقية.**

**والعبارة صحيحة لأنه لأي عدد حقيقي** x **يكون مربع** x **موجبا أو صفرا.**

**مثال ١-٢٥:**

**العبارة المسوَّرة شموليا**

**لأي عدد حقيقي** x **إذا كانت** $x > 1$ **فإن** $x + 1 > 1$

for every real number x, if $x > 1$, then $x + 1 > 1$

**صحيحة.**

**هنا يجب أن نتحقق من أن العبارة**

if $x > 1$, then $x + 1 > 1$

**صحيحة لأي عدد حقيقي** x.

نفرض أن x أي عدد حقيقي. من الصحيح (true) أنه لأي عدد حقيقي x إما أن $x \le 1$ أو أن $x > 1$.

(i) في حالة ما إذا كانت $x \le 1$ فإن الافتراض الشرطي

If $x > 1$, then $x + 1 > 0$

يكون صحيحا لأن الفرض $x > 1$ خاطئ [تذكر أنه عندما يكون الفرض خاطئا فإنه الافتراض الشرطي يكون صحيحا بغض النظر عما إذا كانت النتيجة صحيحة أم خاطئة].

(ii) وفي حالة ما إذا كانت $x > 1$ فمهما كانت قيمة x فإن $x + 1 > x$. وحيث أن

$$x + 1 > x \quad \text{and} \quad x > 1$$

فنستنتج أن

$$x + 1 > 1$$

وبالتالي فإن النتيجة صحيحة. أي أنه إذا كان $x > 1$ فإن الفرض صحيح والنتيجة صحيحة ، ولذلك فإن الافتراض الشرطي

If $x > 1$, then $x + 1 > 1$

صحيح.

من (i) ، (ii) يتبين لنا أنه لأي عدد حقيقي x فإن الافتراض

if $x > 1$, then $x + 1 > 1$

صحيح ، وبالتالي فإن العبارة المعطاة المسوَّرة شموليا صحيحة ، وهو المطلوب إثباته.

**مثال ١-٢٦:**

العبارة المسوَّرة شموليا

$x^2 - 1 > 0$ لأي عدد حقيقي x

for every real number x, $x^2 - 1 > 0$

خاطئة ، لأنه إذا كانت $x = 1$ فإن الافتراض

$$1^2 - 1 > 0$$

خاطئ. ويقال إن القيمة 1 **مثال مناقض (counterexample)** للعبارة.

$x^2 - 1 > 0$ لأي عدد حقيقي x.

ولبيان أن العبارة المسوَّرة شموليا $\forall x \quad P(x)$

خاطئة يكفي أن نجد قيمة واحدة x في مجال التطبيق يكون عندها الافتراض $P(x)$ خاطئا. أما طريقة إثبات / بيان أن العبارة $\forall x \quad P(x)$ صحيحة فتختلف تماما حيث يجب أن نفحص كل قيمة من قيم x في مجال التطبيق ونثبت أن $P(x)$ عندها صحيح.

**مثال ١–٢٧:**

العبارة المسوَّرة شموليا

إذا كان n عددا زوجيا فإن $n^2 + n + 19$ عدد أولي، وذلك لأي عدد صحيح موجب n

for every positive integer n, if n is even, then $n^2 + n + 19$ is prime

عبارة خاطئة. ويمكننا الحصول على مثال مناقض إذا أخذنا n = 38. فالافتراض الشرطي

if 38 is even, then $38^2 + 38 + 19$ is prime

خاطئ لأن الفرض (38 is even) صحيح ، بينما النتيجة $(38^2 + 38 + 19 \text{ is prime})$ خاطئة ، وذلك لأن $38^2 + 38 + 19$ ليس عددا أوليا ، حيث يمكن تحليله / إعماله (factored) كما يلي:

$38^2 + 38 + 19$ = 38 × 38 + 38 + 19 = 19(2 × 38 + 2 + 1) = 19 × 79.

والآن نعود إلى العبارات المسوَّرة وجوديا. بناءً على تعريف سابق فإن العبارة

$$\exists \ x \text{ in } D, \quad P(x)$$

تكون صحيحة إذا كان $P(x)$ صحيحا على الأقل لقيمة واحدة x في D.

وإذا كان $P(x)$ صحيحا لبعض قيم x فمن الممكن أن يكون خاطئا لقيم أخرى للمتغير x.

**مثال ١–٢٨:**

العبارة المسوَّرة وجوديا

$\frac{x}{x^2+1} = \frac{2}{5}$ لبعض الأعداد الحقيقية x

for some real x, $\frac{x}{x^2+1} = \frac{2}{5}$

صحيحة ، لأنه يمكن أن نجد عددا حقيقيا واحدا x يكون عنده الافتراض

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{2}{5}$$

صحيحا. مثلا إذا أخذنا x = 2 فإننا نحصل على الافتراض الصحيح

$$\frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5}.$$

وليس صحيحا أن أي قيمة للمتغير x ستؤدي إلى افتراض صحيح ، فمثلا عندما $x = 1$ نحصل على الافتراض الخاطئ

$$\frac{1}{1^2+1} = \frac{2}{5}$$

**مثال ١-٢٩:**

العبارة المسوَّرة وجوديا

إذا كان n عددا أوليا فإن كلا من n+4 وn+1, n+2, n+3 ليس عددا أوليا ، وذلك لبعض قيم الأعداد الصحيحة n.

for some positive integer n, if n is prime, then n+1, n+2, n+3 and n+4 are not prime

صحيحة ، وذلك لأنه يمكننا أن نجد على الأقل عددا صحيحا واحدا n يجعل الافتراض الشرطي

if n is prime, then n+1, n+2, n+3, and n+4 are not prime

صحيحا. فمثلا إذا كانت n = 23 فإننا نحصل على الافتراض الصحيح

if 23 is prime, then 24, 25, 26, and 27 are not prime.

[هذا الافتراض الشرطي صحيح لأن الفرض (23 عدد أولي) صحيح وكذلك النتيجة (24, 25, 26, 27 ليست أعدادا أولية) صحيحة]. فهناك بعض قيم n تجعل الافتراض الشرطي صحيحا (مثل n = 23, n = 47, n = 4) ، بينما هناك قيم أخرى تجعل الافتراض خاطئا (مثل n = 2, n = 101).

**مثال ١-٣٠:**

اثبت أن العبارة المسوَّرة وجوديا

$$\frac{1}{x^2+1} > 1$$ لبعض الأعداد الحقيقية x

for some real number x, $\frac{1}{x^2+1} > 1$

خاطئة.

**الحل:**

سنثبت أن العلاقة $\frac{1}{x^2+1} > 1$ خاطئة لجميع الأعداد الحقيقية x.

أي نثبت أن العلاقة $\frac{1}{x^2+1} \le 1$ صحيحة لأي عدد حقيقي x.

نفرض أن x أي عدد حقيقي.

$$0 \le x^2$$

وبإضافة 1 إلى كل من الطرفين:

$$1 \le x^2 + 1$$

وبقسمة طرفي هذه المتباينة (inequality) على $x^2 + 1$ نحصل على العلاقة المطلوب إثبات صحتها لأي عدد حقيقي x:

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2+1} \le 1 \quad \text{(true for every real number x)}$$

نلاحظ في هذا المثال أننا أثبتنا خطأ العبارة المسوَّرة وجوديا عن طريق إثبات صحة عبارة مسوَّرة شموليا مقابلة لها. والنظرية التالية – والتي تعتبر تعميما لقوانين دي مورجان في المنطق – تحدد هذه المقابلة / العلاقة بين مثل هاتين العبارتين بصورة دقيقة.

**نظرية ١-٢:**

نفرض أن P دالة افتراضية. الافتراضان المذكوران معا في كل من (أ) ، (ب) – فيما يلي – لهما قيمة الصحة نفسها ، أي أن الاثنين إما صحيحان معا أو خاطئان معا.

(أ) $\overline{\forall x \quad P(x)} \quad ; \quad \exists x \quad \overline{P(x)}$

(ب) $\overline{\exists x \quad P(x)} \quad ; \quad \forall x \quad \overline{P(x)}$

**البرهان:**

نكتفي بإعطاء برهان الجزء (أ) ، ونترك إثبات الجزء (ب) – وهو شبيه بإثبات الجزء (أ) – للقارئ الكريم.

نفرض أن الافتراض $\overline{\forall x \quad P(x)}$ صحيح (true). وبالتالي يكون الافتراض $\forall x \quad P(x)$ خاطئا (false). وهذا يعني أن $P(x)$ خاطئ على الأقل لقيمة واحدة x في مجال التطبيق. أي أن $\overline{P(x)}$ صحيح على الأقل لقيمة واحدة x في مجال التطبيق. وهذا بدوره يعني أن الافتراض $\exists x \quad \overline{P(x)}$ صحيح. وهكذا نكون قد أثبتنا أنه إذا كان الافتراض $\overline{\forall x \quad P(x)}$ صحيحا ، فإن الافتراض $\exists x \quad \overline{P(x)}$ صحيح. وبالمثل يمكننا إثبات أنه إذا كان الافتراض $\overline{\forall x \quad P(x)}$ خاطئا فإن الافتراض $\exists x \quad \overline{P(x)}$ خاطئ. أي أن الافتراضين المذكورين في (أ) إما صحيحان معا أو خاطئان معا ، أي لهما قيمة الصحة نفسها.

**مثال ١–٣١:**

نفرض أن $P(x)$ هي العبارة $\frac{1}{x^2+1} > 1$

اثبت أن العبارة المسوَّرة وجوديا

for some real number x, $\frac{1}{x^2+1} > 1$

خاطئة. أي اثبت أن العبارة $\exists x \quad P(x)$ خاطئة.

**الحل:**

يتم إثبات المطلوب بإثبات أن العبارة $\overline{\exists x \quad P(x)}$ صحيحة.

ومن الجزء (ب) من النظرية السابقة يتم لنا المطلوب بإثبات أن العبارة $\forall x \quad \overline{P(x)}$ صحيحة ، وهذا هو ما أثبتناه في حل المثال السابق (مثال ١–٣٠) حيث أثبتنا صحة العبارة

for every real number x, $\frac{1}{x^2+1} \le 1$

أي أثبتنا أن العبارة $\forall x \quad \overline{P(x)}$ صحيحة.

ويمكن أن نعطي البرهان بالطريقة التالية:

نحن أثبتنا (في حل مثال ١–٣٠) صحة العبارة

for every real number x, $\frac{1}{x^2+1} \le 1$

أي أثبتنا أن الافتراض $\forall x \quad \overline{P(x)}$ صحيح

وبنفي هذا الافتراض نستنتج أن

$$\overline{\forall x \quad \overline{P(x)}}$$

خاطئ. وبتطبيق الجزء (أ) من النظرية السابقة نجد أن

$\exists x \quad \overline{\overline{P(x)}}$ خاطئ

وهذا يكافئ أن العبارة $\exists x \quad P(x)$ خاطئة

وهو ما نريد إثباته.

ملاحظتان:

(i) الافتراض المسوّر شموليا يعتبر تعميما (generalization) للافتراض المركّب (compound proposition)

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \qquad (1)$$

بمفهوم أن الافتراضات الفردية $P_1, P_2, \cdots, P_n$ نستبدل بها عائلة اختيارية $P(x)$ (arbitrary family) ، حيث x عنصر في مجال التطبيق ، والافتراض المركب (1) نستبدل به

$$\forall x \quad P(x) \qquad (2)$$

ومعلوم أن الافتراض (1) يكون صحيحا إذا وفقط إذا كان $P_i$ صحيحا لكل i ، حيث i = 1, 2, ..., n. وبالمثل فإننا نعرِّف قيمة الصحة للافتراض (2) بأن هذا الافتراض يكون صحيحا إذا وفقط إذا كان $P(x)$ صحيحا لكل x في مجال التطبيق.

(ii) وبصورة مماثلة فإن الافتراض المسوّر وجوديا يعتبر تعميما للافتراض المركب

$$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n \qquad (3)$$

بمفهوم أن الافتراضات الفردية $P_1, P_2, \cdots, P_n$ نستبدل بها عائلة اختيارية $P(x)$ ، حيث x عنصر في مجال التطبيق ، والافتراض المركب (3) نستبدل به

$$\exists x \quad P(x) \qquad (4)$$

الملاحظتان السابقتان توضحان كيف أن النظرية السابقة (نظرية ١-٢) تعد تعميما لقوانين دي مورجان في المنطق (مثال ١-١٥). ومن القانون الأول نعلم أن الافتراضين

$$\overline{P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n} \quad ; \quad \overline{P_1} \wedge \overline{P_2} \wedge \cdots \wedge \overline{P_n}$$

لهما قيمة الصحة نفسها. وفي نظرية ١-٢ الجزء (ب) نلاحظ أننا قد استبدلنا $\exists x \quad \overline{P(x)}$ بالافتراض $\overline{P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n}$ ، واستبدلنا $\forall x \quad \overline{P(x)}$ بالافتراض $\overline{P_1} \wedge \overline{P_2} \wedge \cdots \wedge \overline{P_n}$.

مثال ١-٣٢:

أحيانا كثيرة تحتمل بعض العبارات المصاغة بكلمات (وليس برموز) أكثر من معنى أو تفسير. فمثلا المثل القائل:

ليس كل ما يلمع ذهبا

All that glitters is not gold

قد يحتمل المعنى: بعض ما يلمع ليس ذهبا (something that glitters is not gold) ، أو المعنى: كل ما يلمع ليس ذهبا [أي أن: أي شئ يلمع ليس ذهبا / أي شئ من الذهب لا يلمع / (nothing that glitters is gold)] (a gold object never glitters). وطبعا المعنى الأول هو المقصود من المثل.

نفرض أن $P(x)$ هي الدالة الافتراضية " x glitters "

$Q(x)$ هي الدالة الافتراضية " x is gold ".

المعنى الأول يصبح: $\exists x \quad P(x) \wedge \overline{Q(x)}$

بينما المعنى الثاني يصبح: $\forall x \quad P(x) \to \overline{Q(x)} \qquad (*)$

وباستخدام النتيجة $\overline{p \to q} \equiv p \wedge \overline{q}$ (مثال ١-١٧)

نرى أن قيمة الصحة للمعنى الأول هي نفسها قيمة الصحة للعبارة

$$\exists x \quad \overline{P(x) \to Q(x)}$$

والتي بدورها تساوي – باستخدام نظرية ١-٢ الجزء (أ) – قيمة صحة

$$\overline{\forall x \quad P(x) \to Q(x)} \qquad (**)$$

بمقارنة الافتراضين (**) , (*) نرى أن الالتباس في معنى المثل المذكور أي الفارق بين المعنيين هو: هل النفي (negation) ينطبق على $Q(x)$ فقط (المعنى الثاني) أم ينطبق على العبارة كلها $[\forall x \quad P(x) \to Q(x)]$ (المعنى الأول) ؟

يلاحَظ في العبارات الإيجابية (positive statements) أن الكلمات any, all, each, every لها جميعا المعنى نفسه. بينما في العبارات السلبية (negative statements) يختلف الحال ، فالعبارات

Not all x satisfy $P(x)$.
Not each x satisfies $P(x)$.
Not every x satisfies $P(x)$.

تعتبر جميعها لها المعنى نفسه مثل

$$\exists x \quad \overline{P(x)}$$

بينما العبارتان

Not any x satisfies $P(x)$.
No x satisfies $P(x)$.

تعنيان

$$\forall x \quad \overline{P(x)}$$

المثال التالي يبين أنه من الممكن الجمع بين المسوّرات الشاملة والمسورات الوجودية في عبارة واحدة ، وأنه يمكن تسوير (quantifying over) أكثر من متغير واحد.

مثال ١-٣٣:

نفرض أن مجال التطبيق هو مجموعة الأعداد الحقيقية ، وأن لدينا العبارة

$$\forall x \quad \exists y \quad x + y = 0$$

معنى هذه العبارة أنه لأي قيمة x توجد على الأقل قيمة واحدة y (قد تعتمد على اختيار x) بحيث أن x+y = 0. ويمكننا إثبات أن هذه العبارة

$$\forall x \quad \exists y \quad x + y = 0$$

صحيحة:

**لأي $x$ يمكننا أن نجد على الأقل قيمة واحدة $y$ وهي $y = -x$ بحيث أن $x + y = 0$ صحيحة.**

**إذا عكسنا ترتيب $\forall x, \quad \exists y$ في عبارة هذا المثال فإننا نحصل على عبارة خاطئة ، كما يتضح من المثال التالي:**

**مثال ١–٣٤:**

**نفرض أن مجال التطبيق هو مجموعة الأعداد الحقيقية. اثبت أن العبارة**

$$\exists y \quad \forall x \quad x + y = 0$$

**خاطئة.**

**الحل:**

**إذا كانت هذه العبارة صحيحة فإنه يمكننا اختيار قيمة ما للمتغير $y$ بحيث تكون العبارة**

$$\forall x \quad x + y = 0$$

**صحيحة. إلا أننا نستطيع أن نثبت عدم صحة هذه العبارة بمثال مناقض. مثلا يمكننا أخذ $x = 1-y$ ، وبذلك نحصل على $1 - y + y = 0$ أي نحصل على $1 = 0$ وهي عبارة خاطئة. ولذلك فإن العبارة المعطاة**

$$\exists y \quad \forall x \quad x + y = 0$$

**عبارة خاطئة.**

**مثال ١–٣٥:**

**نفرض أن $P(x, y)$ ترمز إلى العبارة**

$$\text{if} \quad x^2 < y^2, \ \text{then } x < y$$

**وأن مجال التطبيق هو مجموعة الأعداد الحقيقية. اثبت ما يلي:**

**أ) خطأ العبارة**

$$\forall x \quad \forall y \quad P(x, y)$$

**ب) صحة العبارة**

$$\forall x \quad \exists y \quad P(x, y)$$

ج) صحة العبارة

$$\forall y \quad \exists x \quad P(x, y)$$

**الحل:**

أ) يكفينا إعطاء المثال المناقض (counter example):

$x = 1, \qquad y = -2$

في هذه الحالة نحصل على الافتراض الخاطئ:

$$\text{if} \quad 1^2 < (-2)^2, \quad \text{then} \quad 1 < -2$$

ب) نثبت أنه لجميع قيم x فإن الافتراض

$$\exists y, \quad \text{if} \quad x^2 < y^2, \quad \text{then} \quad x < y$$

صحيح بأن نعطي قيمة للمتغير y تجعل الافتراض

$$\text{if} \quad x^2 < y^2, \quad \text{then} \quad x < y$$

صحيحا. إذا اخترنا $y = 0$ فإننا نحصل على الافتراض الصحيح

$$\text{if} \quad x^2 < 0, \quad \text{then} \quad x < 0$$

[لاحظ أن الافتراض الشرطي يكون صحيحا عندما يكون الفرض خاطئا $(x^2 < 0)$].

ج) نثبت أنه لجميع قيم y فإن الافتراض

$$\exists x, \quad \text{if} \quad x^2 < y^2, \quad \text{then} \quad x < 0$$

صحيح بأن نعطي قيمة للمتغير x تجعل الافتراض

$$\text{if} \quad x^2 < y^2, \quad \text{then} \quad x < y$$

صحيحا. إذا اخترنا $x = |y| + 1$ فإننا نحصل على الافتراض الصحيح

$$\text{if} \left(|y| + 1\right)^2 < y^2, \quad \text{then} \quad |y| + 1 < y$$

[لاحظ مرة أخرى أن الافتراض الشرطي صحيح لأن الفرض $\left(|y| + 1\right)^2 < y^2$ خاطئ].

* * *

**نلخص فيما يلي قواعد إثبات صحة أو خطأ العبارات المسوّرة شموليا أو وجوديا:**

(i) **لإثبات صحة العبارة المسوّرة شموليا** $\forall x \quad P(x)$ **نثبت صحة الافتراض** $P(x)$ **لجميع قيم** $x$ **في مجال التطبيق. أما إذا أثبتنا صحة** $P(x)$ **لقيمة معينة** $x$ **، فإن هذا لا يثبت صحة العبارة** $\forall x \quad P(x)$ .

(ii) **لإثبات صحة العبارة المسوّرة شموليا** $\exists x \quad P(x)$ **يكفي أن نجد قيمة واحدة** $x$ **في مجال التطبيق يكون عندها الافتراض** $P(x)$ **صحيحا.**

(iii) **لإثبات خطأ العبارة المسوّرة شموليا** $\forall x \quad P(x)$ **يكفي أن نجد قيمة واحدة** $x$ (مثالا مناقضا) **في مجال التطبيق يكون عندها الافتراض** $P(x)$ **خاطئا.**

(iv) **لإثبات خطأ العبارة المسوّرة وجوديا** $\exists x \quad P(x)$ **نثبت أنه لجميع قيم** $x$ **في مجال التطبيق الافتراض** $P(x)$ **خاطئ. أما إثبات أن** $P(x)$ **خاطئ عند قيمة معينة** $x$ **فلا يعد إثباتا لخطأ العبارة** $\exists x \quad P(x)$ .

## البراهين
## Proofs

**يتكون النظام الرياضي (mathematical system) من: موضوعات (axioms) ، وتعريفات (definitions) ، ومصطلحات غير معرَّفة (undefined terms). وتستخدم التعريفات لإنشاء مفاهيم** (concepts) **جديدة بدلالة المفاهيم المعلومة. وهناك بعض المصطلحات التي لا تُعرَّف صراحة** (explicitly) **وإنما تُعرَّف ضمنيا** (implicitly) **بالموضوعات. وفي النظام الرياضي يمكننا استنتاج نظريات. والنظرية (theorem): هي افتراض** (proposition) **تم إثبات صحته. وهناك بعض أنواع من النظريات يُشار إليها على أنها تمهيديات أو لازمات / نتائج. والتمهيدية (lemma): هي عادة نظرية ليس لها في ذاتها أهمية كبيرة تُذكر ، وإنما تُستخدم لبرهنة نظرية أخرى. واللازمة / النتيجة (corollary): هي نظرية تنتج** (أي يمكن استنتاجها) **مباشرة من نظرية أخرى.**

**مثال ١-٣٦:**

**تُعد الهندسة الإقليدية** (euclidean geometry) **مثالا للنظام الرياضي**

(i) **فمن بين الموضوعات** (axioms):

- **إذا أُعطينا نقطتين مختلفتين** (2 distinct points) **فهناك خط** (line) **يحتويهما** (contain).
- **إذا أُعطينا خطا ونقطة لا تقع على الخط فهناك خط واحد بالضبط يمر بالنقطة المعطاة ويوازي الخط المعطى.**

(ii) **نلاحظ أن المصطلحين: " النقطة " و " الخط " غير معرفين صراحة وإنما ضمنيا بالموضوعتين اللتين تصفان** (describe) **خواصهما** (properties).

(iii) **ومن بين التعريفات:**

- **يُقال لمثلثين** (triangles) **إنهما متطابقان** (congruent) **إذا أمكن ترتيب رؤوسهما** (vertices) **في أزواج** (can be paired) **بحيث تكون الأضلاع المتقابلة** (corresponding sides) **متساوية** (equal) **، وكذلك الزوايا** (angles) **المتقابلة متساوية.**
- **يقال لزاويتين إنهما متكاملتان** (supplementary) **إذا كان مجموع قياسيهما** $180^o$.

**مثال ١-٣٧:**

**الأعداد الحقيقية تعد مثالا آخر للنظام الرياضي.**

(i) **فمن بين الموضوعات:**

- **لأي عددين حقيقيين** $x, y$: $xy = yx$.
- **توجد مجموعة جزئية** P (subset) **من الأعداد الحقيقية تحقق ما يلي:**

أ) **إذا كان** $x, y$ **ينتميان إلى** P **فإن** $x+y, xy$ **ينتميان أيضا إلى** P.

ب) **إذا كان** x **عددا حقيقيا فإن واحدة بالضبط من العبارات التالية تكون صحيحة:**

$x \in P \qquad x = 0 \qquad -x \in P$

(ii) **نلاحظ أن المصطلح " الضرب "** (multiplication) **مُعرَّف ضمنيا بالموضوعة الأولى (وموضوعات أخرى تصف الخواص التي يُفترض أن يحققها الضرب).**

(iii) **ومن بين التعريفات:**

- **عناصر** P **(حيث** P **هي المذكورة في الموضوعة السابقة) تسمَّى: "الأعداد الحقيقية الموجبة".**
- **القيمة المطلقة** |x| (absolute value) **لعدد حقيقي** x **تعرَّف بأنها:** x **إن كانت** x **موجبة أو** 0 **، وما عدا ذلك فإنها:** -x.

**وفيما يلي نعطي بعض الأمثلة للنظريات والنتائج (اللازمات) والتمهيديات في كل من الهندسة الإقليدية ونظام الأعداد الحقيقية.**

**مثال ١-٣٨:**

(i) **من نظريات الهندسة الإقليدية:**

- **إذا تساوى ضلعا** (sides) **مثلث فإن الزاويتين المقابلتين** (opposite) **لهما تكونان متساويتين.**
- **إذا نَصَّف** (bisect) **قطرا** (diagonals) **رباعي الأضلاع** (quadrilateral) **كل منهما الآخر ، فإن رباعي الأضلاع يكون متوازي أضلاع** (parallelogram).

(ii) **ومن نتائج الهندسة الإقليدية:**

- **إذا كان المثلث متساوي الأضلاع** (equilateral) **، فإنه يكون أيضا متساوي الزوايا** (equiangular)**. وتنتج هذه النتيجة مباشرة من النظرية الأولى في** (i).

(iii) **ومن نظريات الأعداد الحقيقية:**

- $x.0 = 0$ **لجميع الأعداد الحقيقية** x.
- **لجميع الأعداد الحقيقية** x, y, z:

$$\text{if } x \le y \quad \text{and} \quad y \le z, \quad \text{then} \quad x \le z$$

(iv) **ومن تمهيديات الأعداد الحقيقية:**

- **إذا كان** $n$ **عددا صحيحا موجبا ، فإما أن يكون** $n-1$ **عددا صحيحا موجبا أو أن يكون** $n-1=0$.

**فمن المؤكد أن هذه النتيجة ليست مهمة في حد ذاتها ، وإنما يمكن استخدامها لبرهنة نتائج أخرى.**

* * *

**وعادة تكون النظريات في الصيغة العامة التالية:**

$$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \quad \text{if } p(x_1, x_2, \cdots, x_n), \text{ then } q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

**وهذه العبارة المسوّرة شموليا تكون صحيحة بشرط أن يكون الافتراض الشرطي**

$$\text{if } p(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad \text{then } q(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (*)$$

**صحيحا لجميع قيم** $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **في مجال التطبيق. ولإثبات صحة هذا الافتراض الشرطي فإننا نفترض أن** $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **عناصر اختيارية** (arbitrary members) **في مجال التطبيق. فإن كان الفرض** $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ **خاطئا فإن الافتراض الشرطي يكون صحيحا** (تعريفا)**. ولذلك يكفي أن ندرس الحالة عندما يكون الفرض** $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ **صحيحا.**

**أولا: البرهان المباشر (direct proof):**

**هو برهان يفترض** (assumes) **أن** $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ **صحيح ، ثم يستخدم هذا الفرض** $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ **وتمهيديات وتعريفات ونظريات (سبق استنتاجها) أخرى ليثبت مباشرة أن النتيجة** $q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ **صحيحة.**

**مثال ١-٣٩:**

**اثبت – بالبرهان المباشر – العبارة التالية:**

**لجميع الأعداد الحقيقية** $d, d_1, d_2, x$:

$$\text{if } d = \min\{d_1, d_2\} \text{ and } x \le d, \text{ then } x \le d_1 \text{ and } x \le d_2.$$

**البرهان:**

نفرض أن $d, d_1, d_2, x$ أعداد حقيقية اختيارية. يكفي – كما رأينا في المناقشة قبل المثال – أن نفرض صحة

$$d = \min\{d_1, d_2\} \quad \text{and} \quad x \le d$$

ثم نثبت صحة

$$x \le d_1 \quad \text{and} \quad x \le d_2$$

من تعريف min نرى أن $d \le d_1 \quad \text{and} \quad d \le d_2$.

ونظرا لأن $x \le d \quad \text{and} \quad d \le d_1$

فإننا نستنتج أن $x \le d_1$ [من النظرية الثانية في مثال ١–٣٨–(iii)]

وكذلك نظرا لأن $x \le d \quad \text{and} \quad d \le d_2$

فإننا نستنتج أن $x \le d_2$ [من النظرية السابقة نفسها]

ولذلك فإن $x \le d_1 \quad \text{and} \quad x \le d_2$

**ثانيا: البرهان بالتناقض (proof by contradiction):**

هو برهان يفترض أن الفرض $p$ [في الافتراض (*)] صحيح ، وأن النتيجة $q$ خاطئة ، ثم يستخدم كلا من $p$ و $\overline{q}$ وتمهيديات وتعريفات ونظريات (سبق استنتاجها) أخرى للوصول إلى تناقض. والتناقض (contradiction) هو افتراض في الصيغة $r \wedge \overline{r}$ (حيث $r$ هو أي افتراض). وأحيانا يُطلق على البرهان بالتناقض البرهان غير المباشر (indirect proof) لأنه لإثبات صحة (*) نسلك طريقا غير مباشر بأن نصل أولا إلى نتيجة ($r \wedge \overline{r}$) – أي البرهان غير المباشر – ثم نستنتج منها أن الافتراض (*) صحيح.

والفارق الوحيد بين الافتراضات (assumptions) في البرهان المباشر والبرهان بالتناقض هو في النتيجة المنفية (negated conclusion) ، حيث نفترض أن النتيجة خاطئة في البرهان بالتناقض ولا نفترض ذلك في البرهان المباشر.

ويمكننا تعليل / إثبات صلاحية البرهان بالتناقض بملاحظة تكافؤ (equivalence) الافتراضين:

$$p \to q \quad \text{and} \quad p \wedge \overline{q} \to r \wedge \overline{r}$$

كما يتضح من المثال التالي.

مثال ١-٤٠:

اثبت باستخدام جدول الصحة أن الافتراضين

$$p \to q \quad \text{and} \quad p \wedge \bar{q} \to r \wedge \bar{r}$$

متكافئان.

الحل:

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \to q$ | $p \wedge \bar{q}$ | $r \wedge \bar{r}$ | $p \wedge \bar{q} \to r \wedge \bar{r}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | F | F | T |
| T | T | F | T | F | F | T |
| T | F | T | F | T | F | F |
| T | F | F | F | T | F | F |
| F | T | T | T | F | F | T |
| F | T | F | T | F | F | T |
| F | F | T | T | F | F | T |
| F | F | F | T | F | F | T |

مثال ١-٤١:

برهن بالتناقض العبارة التالية:

$\forall$ real numbers x and y, if $x + y \geq 2$, then either $x \geq 1$ or $y \geq 1$.

البرهان:

نفـرض أن الفـرض $x + y \geq 2$, صـحيح ، وأن النتيجــة خاطئــة. أي أن $x < 1 \quad \text{and} \quad y < 1$ (لاحظ من قوانين دي مورجان في المنطق أن نفي or's يـؤدي إلى and's). وباسـتخدام نظريـة سـابقة يمكننـا إضـافة هـاتين المتبـاينتين لنحصل على:

$$\begin{array}{rl} & x < 1 \\ \text{and} & \underline{y < 1} \\ & x+y < 1+1 = 2 \end{array}$$

والآن نكـون قـد وصـلنا إلى التنـاقض $p \wedge \bar{p}$ حيـث $p : x + y \geq 2$. وبالتـالي نستنتج أن العبارة المعطاة صحيحة.

نلاحــظ مــن برهــان هــذا المثــال أننــا أثبتنــا بالتنــاقض الافــتراض (*)[if p, then q] باستنتاج $\bar{p}$ ، أي أننا بَرهَنَّا

$$\bar{q} \to \bar{p}$$

**وهذه الحالة الخاصة من البرهان بالتناقض يطلق عليها البرهان بالمكافئ العكسي (proof by contrapositive).**

**وعند صياغة برهان ما يجب أن تكون الحجج** (arguments) **التي نعطيها صحيحة** (valid). **وفيما يلي تحدد بصورة أدق مفهوم الحجة الصحيحة ونناقش ببعض التفصيل هذا المفهوم.**

**مثال ١-٤٢:**

**اقرأ مثلا متتالية الافتراضات** (sequence of propositions) **التالية:**

**أخطاء البرنامج إما تركيبية أو معنوية.**

**البرنامج به أخطاء.**

**ليس بالبرنامج أي أخطاء معنوية.**

**بفرض أن هذه العبارات جميعها صحيحة ، فمن المعقول أن نستنتج أن:**

**البرنامج به أخطاء تركيبية**

**هذه العملية** (process) **التي نقوم فيها باستخلاص استنتاج** (conclusion) **معين من متتالية من الافتراضات يُطلق عليها " الاستنباط الاستنتاجي " (deductive reasoning). والافتراضات المعطاة (كالمذكورة في مثال ١-٤٢) تسمى فَرَضِيات (hypotheses) أو مقدمات منطقية (premises) ، والافتراض المستنتج من هذه المقدمات المنطقية يطلق عليه الاستنتاج (conclusion). والحجة (الاستنتاجية) [(deductive) argument] تتكون من فَرَضيات / مقدمات منطقية مع استنتاج. وهناك براهين كثيرة في الرياضيات وفي علم الحاسوب تعد حججا استنتاجية.**

**وصيغة أي حجة هي:**

$$\text{If} \quad p_1 \text{ and } p_2 \text{ and} \cdots \text{and } p_n, \quad \text{then } q.$$

**وهذه الصيغة يُقال إنها صحيحة / صالحة** (valid) **إذا كان الاستنتاج يَتْبع حتما الفرضيات / المقدمات المنطقية: أي أنه إذا كان** $p_1, p_2, \cdots, p_n$ **جميعها صحيحة ، فإن** $q$ **يجب أيضا أن يكون صحيحا. ومما سبق يمكننا أن نعطي التعريف التالي:**

**تعريف:**

**الحجة (argument) هي متتالية من الافتراضات تُكتب في الصورة:**

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

**أو في الصورة:**

$$p_1, p_2, \cdots, p_n \,/ \therefore q$$

**والافتراضات** $p_1, p_2, \cdots, p_n$ **تسمى الفرضيات** (hypotheses) **أو المقدمات المنطقية** (premises) ، **والافتراض** q **يُسمَّى النتيجة** (conclusion).

**ويقال إن الحجة صالحة (valid) إذا تحقق الشرط التالي:**

**[إذا كانت جميع الافتراضات** $p_1, p_2, \cdots, p_n$ **صحيحة** (true) **فيجب أن يكون الافتراض** q **أيضا صحيحا** (true)] ، **وإلا فإن الحجة غير صالحة (invalid) / مغالَطَة (fallacy).**

**وفي حالة الحجة الصالحة فإننا أحيانا نقول إن النتيجة تَتْبع الفَرَضيات** (conclusion follows from the hypotheses). **ولاحظ أننا لا نقول إن النتيجة صحيحة** (true) ، **وإنما فقط نقول إننا إذا ضَمَنَّا الفرضيات / المقدمات فيجب أن نضمن أيضا النتيجة ، أي أن الحجة تكون صالحة بسبب صيغتها** (form) **وليس بسبب محتواها** (content).

**مثال ١-٤٣:**

**حدِّد ما إذا كانت الحجة التالية صالحة** (valid) **أم لا:**

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

**الحل:**

**الطريقة الأولى:**

نكوّن جدول صحة لكل الافتراضات الموجودة لدينا:

| p | q | $p \to q$ | p | q |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | T |
| F | F | T | F | F |

نلاحظ أنه كلما كان الفرضان $p\to q$ & p(hypotheses) صحيحين فإن النتيجة q(conclusion) تكون أيضا صحيحة. ولذلك فإن الحجة صالحة.

الطريقة الثانية:

يمكننا التحقق مباشرة من صحة النتيجة عندما يكون الفرضان صحيحين بدون كتابة جدول صحة. نفرض أن الفرضين $p \to q$ & p صحيحين. واضح أن q يجب أن يكون صحيحا ، وإلا فإن $p \to q$ سيكون خاطئا. ولذلك فإن الحجة المعطاة صالحة.

مثال ١-٤٤:

١) مَثِّل (represent) الحجة التالية باستخدام الرموز (symbolically):

if 2 = 3, then he ate up usury.
he ate up usury

$\therefore 2 = 3$

٢) ثم حَدِّد ما إذا كانت الحجة صالحة أم لا.

الحل:

أ) نفرض أن

p: 2 = 3, q: he ate up usury

وبالتالي يمكن أن نكتب الحجة بالرموز هكذا:

$$p \to q$$
$$\underline{q \quad\quad}$$
$$\therefore p$$

ب) إذا كانت الحجة صالحة فإنه كلما كان $p \to q$ & q صحيحين فإن p يجب أن يكون أيضا صحيحا. نفرض أن $p \to q$ & q صحيحان. ومن

الحالات التي يمكن أن يتحقق فيها هذا: أن يكون $p$ خاطئا و $q$ صحيحا. وفي هذه الحالة فإن $p$ غير صحيح ، وبالتالي فإن الحجة غير صالحة.

**حل آخر:**

يمكننا أيضا تعيين صلاحية الحجة باختبار جدول الصحة في المثال السابق (مثال ١-٤٣) ، حيث نلاحظ في الصف الثالث في الجدول أن الفرضين $p \to q$ & $q$ صحيحان بينما النتيجة $p$ خاطئة. وبالتالي تكون الحجة غير صالحة.

عموما يتكون البرهان من عدة خطوات (steps) تحتوي على نتائج مرحلية / وسطية (intermediate conclusions) للوصول أخيرا إلى النتيجة النهائية. ويجب أن تكون أي نتيجة مرحلية صالحة حتى يكون البرهان صالحا. وفيما يلي نلقي نظرة على قواعد الاستدلال والتي هي عبارة عن حجج صالحة مختصرة نستخدمها داخل حجج أكبر كبرهان.

## قواعد استدلال الافتراضات (Rules of Inference for Propositions)

رأينا في مثال ١-٤٣ أن الحجة

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

صالحة. وقاعدة الاستدلال هذه يطلق عليها " قانون الفَصْل " (law of detachment / modus ponens) . والجدول التالي يعطي بعض قواعد الاستدلال والتي يمكن التحقق من صحتها باستخدام جداول الصحة.

**مثال ١-٤٥:**

أي قاعدة من قواعد الاستدلال استُخدمت في الحجة (argument) التالية ؟

إذا اجتاز الطالب امتحان الثانوية العامة فيمكنه الالتحاق بالجامعة. وإذا التحق الطالب بالجامعة فيمكنه التخصص في علم الحاسوب. ولذلك إذا اجتاز الطالب امتحان الثانوية العامة فيمكنه التخصص في علم الحاسوب.

| قاعدة الاستدلال<br>rule of inference | اسم القاعدة<br>name |
|---|---|
| $p \to q$<br>$p$<br>$\therefore q$ | **قانون الفَصْل**<br>law of detachment<br>**أو " مودس بوننز "**<br>Modus ponens |
| $p \to q$<br>$\bar{q}$<br>$\therefore \bar{p}$ | **" مودس تولنز "**<br>Modus tollens |
| $p$<br>$\therefore p \vee q$ | **الإضافة**<br>Addition |
| $p \wedge q$<br>$\therefore p$ | **التبسيط**<br>Simplification |
| $p$<br>$q$<br>$\therefore p \wedge q$ | **العطف**<br>Conjunction |
| $p \to q$<br>$q \to r$<br>$\therefore p \to r$ | **القياس المنطقي الفرضي**<br>Hypothetical syllogism |
| $p \vee q$<br>$\bar{p}$<br>$\therefore q$ | **القياس المنطقي الفَصْلي**<br>Disjunctive syllogism |

**الجدول (١)**

## قواعد استدلال الافتراضات

## Rules of inference for propositions

الحل:

نفرض أن p ترمز إلى الافتراض: اجتاز الطالب امتحان الثانوية العامة ،

q ترمز إلى الافتراض: يمكن للطالب الالتحاق بالجامعة ،

r ترمز إلى الافتراض: يمكــن للطالــب التخصــص في علــم الحاسوب

وبالتالي يمكن للحجة أن تكتب بالرموز في الصورة التالية:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

أي أن قاعدة الاستدلال التي تستخدمها الحجة هي القياس المنطقي الفرضي.

مثال ١-٤٦:

نفرض أننا قد أُعطينا الفروض (hypotheses) التالية:

إذا اعتاد صهيب الصدق فإنه سيعتاد أعمال البر. وإذا اعتاد صهيب أعمال البر فإنه سيدخل الجنة بإذن الله. وإذا اعتاد صهيب الصدق فإنه سيُكتب عند الله صِدِّيقا. وقد اعتاد صهيب الصدق.

باستخدام قواعد الاستدلال المذكورة بالجدول السابق اثبت أن الاستنتاج (conclusion) التالي ينتج من / يتبع (follows from) الفروض المعطاة:

سيُكتب صهيب عند الله صِدِّيقا ، وسيدخل الجنة بإذن الله.

الحل:

نفرض أن p تعني الافتراض: اعتاد صهيب الصدق.

q تعني الافتراض: اعتاد صهيب أعمال البر.

r تعني الافتراض: سيدخل صهيب الجنة بإذن الله.

s تعني الافتراض: سيُكتب صهيب عند الله صِدِّيقا.

وبالتالي يمكننا كتابة الفروض في الصيغ الرمزية التالية:

$$p \to q$$
$$q \to r$$
$$p \to s$$
$$p.$$

نظـرا لأن $p \to q \ \& \ q \to r$ فيمكننـا باسـتخدام قاعـدة القيـاس المنطقي الفرضي استنتاج أن $p \to r$.

ونظرا لأن $p \to r \ \& \ p$ فيمكننا باستخدام قانون الفَصْل استنتاج $r$.

ونظـرا لأن $p \to s \ \& \ p$ فيمـكننا أيضـا باسـتخدام قانـون الفَصْـل استنتاج $s$.

ومـن $r$ و $s$ يمكننـا باسـتخدام قاعـدة العطـف اسـتنتاج $r \wedge s$. ونظـرا لأن $r \wedge s$ تمثل الافتراض " سيُكتب صهيب عند الله صديقا ، وسيدخل الجنة بإذن الله " ، فنكون قد أثبتنا بقواعد الاستدلال أن الاستنتاج المطلوب ينتج من الفروض المعطاة.

## قواعد الاستدلال بالنسبة للعبارات المسوَّرة

## Rules of Inference for Quantified Statements

نفـرض أن العبـارة $\forall x \in D \quad P(x)$ صـحيحة (true) ، حيـث D: مجال التطبيق. بناء على ذلك فإن الافتراض $P(x)$ صحيح (true) لكل عنصر x في المجال D (من التعريف). وبصورة خاصة إذا فرضنا أن $d \in D$ فإن $P(d)$ يكون صحيحا. وهكذا نكون قد أوضحنا صلاحية (validity) الحجة (argument).

$$\frac{\forall x \in D \quad P(x)}{\therefore P(d) \ \text{ if } \ d \in D}$$

**قاعدة الاستدلال هذه يطلق عليها " الاختيار الشمولي عند عنصر " (universal instantiation). وبحجج شبيهة يمكننا استنتاج قواعد الاستدلال الأخرى الموجودة بالجدول التالي:**

| اسم القاعدة<br>Name | قاعدة الاستدلال<br>Rule of Inference |
|---|---|
| **الاختيار الشمولي عند عنصر**<br>Universal instantiation | $\dfrac{\forall x \in D \quad P(x)}{\therefore P(d) \text{ if } d \in D}$ |
| **التعميم الشمولي**<br>Universal generalization | $\dfrac{P(d) \text{ for any } d \in D}{\therefore \forall x \quad P(x)}$ |
| **الاختيار الوجودي عند عنصر**<br>Existential instantiation | $\dfrac{\exists x \in D \quad P(x)}{\therefore P(d) \text{ for some } d \in D}$ |
| **التعميم الوجودي**<br>Existential generalization | $\dfrac{P(d) \text{ for some } d \in D}{\therefore \exists x \quad P(x)}$ |

**الجدول (٢)**

**قواعد الاستدلال بالنسبة للعبارات المسوَّرة**

**مثال ١-٤٧:**

**نفرض أننا قد أُعطينا الفرضين** (hypotheses) **التاليين:**

**كل الناس يؤمنون إما بالله أو بالطاغوت. المسلم لا يؤمن بالطاغوت**

Everyone believes either in Allah or in the false deity.
The Muslim does not believe in the false deity.

**اثبت بقواعد الاستدلال أن النتيجة " المسلم يؤمن بالله " تنتج من الفرضين المعطيين.**

**الحل:**

**نفرض أن** $P(x)$ **تعني الدالة الافتراضية** (propositional function)

$P(x)$ : x believes in Allah

**وأن** $Q(x)$ **تعني الدالة الافتراضية**

$Q(x)$ : x believes in the false deity

ولذلك فالفرض الأول يمكن كتابته في الصورة

$$\forall x \quad P(x) \quad \vee \quad Q(x)$$

وبتبادلية $\vee$ نستطيع كتابته في الصورة

$$\forall x \quad Q(x) \quad \vee \quad P(x)$$

وبقاعدة الاستدلال " الاختيار الشمولي عند عنصر " (universal instantiation)

نحصل على: $P(\text{The Muslim}) \vee Q(\text{The Muslim})$

والفرض الثاني يمكننا كتابته في الصورة

$$\overline{Q(\text{The Muslim})}$$

وبقاعدة الاستدلال " القياس المنطقي الفصلي " (disjunctive syllogism) [انظر الجدول رقم (١)] نحصل على:

$$P(\text{The Muslim})$$

والذي يمثل الافتراض:

The Muslim believes in Allah

أي أن النتيجة المطلوبة " المسلم يؤمن بالله " تنتج من الفرضين المعطيين.

## الاستقراء / الاستنتاج الرياضي
## Mathematical Induction

### مبدأ الاستنتاج الرياضي
### (Principle of mathematical induction)

نفرض أنه لأي عدد صحيح موجب n (for each positive integer) لدينا عبارة (statement) $S(n)$ بحيث تكون إما صحيحة (true) أو خاطئة (false).

ونفرض أن

S(1) is true (i)

if S(i) is true $\forall i < n+1$ , then S(n+1) is true (ii)

Then S(n) is true $\forall$ positive integer n

أي أن الفرض الأول (i): العبارة $S(n)$ صحيحة عند قيمة معينة $n = 1$.

والفرض الثاني (ii): إذا كانت $S(i)$ صحيحة عند جميع قيم i الأصغر من $n+1$ [أي عند $i=1, i=2, \ldots, i=n$] فإن $S(i)$ تكون صحيحة عند $i = n+1$ ، أي أن $S(n+1)$ تكون صحيحة. وإذا تحقق هذان الفرضان (i), (ii) فإن النتيجة التالية تتحقق حتما:

$S(n)$ تكون صحيحة لأي عدد صحيح موجب n.

مثال ١-٤٨:

لتوضيح مبدأ الاستنتاج الرياضي هذا نفرض أن $S_n$ تشير إلى مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الأولى والتي عددها n (sum of the first n positive integer):

$$S_n = 1+ 2 + 3 + \ldots + n.$$

ونفرض أن شخصا ما قد ادعى أن

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

هذا يعني أن لدينا متتالية العبارات / المعادلات:

$$S_1 = \frac{1(2)}{2} = 1$$
$$S_2 = \frac{2(3)}{2} = 3$$
$$S_3 = \frac{3(4)}{2} = 6$$
$$\vdots$$

للتحقق من أن هذه العبارات / المعادلات جميعها صحيحة:

- واضح أن المعادلة الأولى $S_1 = 1$ صحيحة.
- إذا أثبتنا أنه إذا كانت جميع المعادلات التي تسبق معادلة معينة – ولتكن المعادلة رقم (n+1) – صحيحة ، فإن هذه المعادلة المعينة – رقم (n+1) – تكون أيضا صحيحة ، فهذا يعني:
    - o المعادلة الثانية ستكون صحيحة لأن الأولى صحيحة.
    - o المعادلة الثالثة ستكون صحيحة لأن الأولى والثانية صحيحتان.

$\vdots$

**وهكذا. أي أن جميع المعادلات ستكون صحيحة ، وهو ما نريد الوصول إليه.**

**والآن نثبت أنه إذا كانت جميع المعادلات التي تسبق المعادلة رقم** (n+1) **صحيحة ، فإن المعادلة رقم** (n+1) **تكون أيضا صحيحة. نفرض أن جميع المعادلات التي تسبق المعادلة** (n+1) **صحيحة ، وبالتالي فإن المعادلة رقم** n **صحيحة ، أي أن**

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**ويجب أن نثبت أن المعادلة رقم** (n+1)**:**

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$

**صحيحة.**

**من تعريف** $S_n$ **نرى أن**

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1+2+3+\cdots+n+(n+1) \\ &= S_n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} \end{aligned}$$

**وهو ما نريد إثباته.**

**نلاحظ أن البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي اشتمل على خطوتين:**

**الأولى: التحقق من أن العبارة المقابلة للقيمة** n=1 **صحيحة.**

**الثانية: فرضنا أن العبارات** n ,... ,2 ,1 **صحيحة ، ثم أثبتنا أن العبارة** (n+1) **ستكون أيضا صحيحة. وعند إثبات العبارة** (n+1) **استخدمنا العبارات** n ,... ,2 ,1**. وتُعَدُّ النقطة الهامة في البرهان بالاستنتاج الرياضي هي ربط** (relating) **العبارات** n ,... ,2 ,1 **بالعبارة** (n+1).

**تعريف: أحيانا يُطلق على الشرط** (i) **المذكور سابقا في مبدأ الاستنتاج الرياضي: الخطوة الأساسية (Basis Step) ، وعلى الشرط** (ii)**: الخطوة الاستقرائية / الاستنتاجية (Inductive Step).**

**ملاحظة:**

**إذا ذكرنا فيما يلي " الاستقراء " أو " الاستنتاج " فإننا نعني " الاستقراء الرياضي " أو " الاستنتاج الرياضي ".**

**مثال ١-٤٩:**

**باستخدام الاستقراء اثبت أن**

$$(*) \qquad n! \ \geq \ 2^{n-1} \quad ; \qquad n = 1, 2, \cdots$$

**حيث** $n!$ **تعني مضروب** n (n Factorial) **والذي يعرَّف كما يلي:**

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 & \text{if } n \geq 1 \end{cases}$$

**أي أنه إذا كانت** $n \geq 1$ **فإن** $n!$ **يساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة بين** 1 **و** n **احتوائيا** (inclusive)**. ويعرَّف** $0!$ **بأنه يساوي** 1**. فمثلا**

$0! = 1! = 1, \qquad 3! = 3.2.1 = 6, \qquad 5! = 5.4.3.2.1 = 120$

**الحل:**

(i) **الخطوة الأساسية:**

**نبيِّن أن العلاقة المطلوبة (*) صحيحة إذا كانت** $n = 1$

$$1! \ \geq \ 2^{1-1}$$

$$1 \ \geq \ 1$$

**أي أن العلاقة (*) صحيحة إذا كانت** $n = 1$.

(ii) **الخطوة الاستقرائية:**

**نفرض أن**

$$i! \ \geq \ 2^{i-1} ; \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

**أي أنه عندما** $i = n$ :

$$n! \ \geq \ 2^{n-1}$$

$$\begin{aligned} (n+1)! &= (n+1) \ n! \\ &\geq (n+1)\, 2^{n-1} \\ &\geq 2 \,.\, 2^{n-1} \qquad\qquad (n+1 \ \geq \ 2) \\ &= 2^n \end{aligned}$$

أي أن

$$(n+1)! \geq 2^n$$

وبالتحقق (verification) من كل من الخطوة الأساسية والخطوة الاستقرائية نستنتج بالاستقراء الرياضي أن العلاقة المعطاة (*) صحيحة لأي عدد صحيح موجب n.

ملاحظتان:

(١) للتحقق من الخطوة الاستقرائية (ii) في مبدأ الاستنتاج الرياضي نفرض أن S(i) صحيح لجميع قيم i الأصغر من n+1 ، ومن ثم نثبت أن S(n+1) صحيح. هذه الصيغة من الاستقراء الرياضي يطلق عليها " الصيغة القوية للاستقراء الرياضي " (strong form of mathematical induction). وغالبا ما نستطيع استنتاج S(n+1) من فرض S(n) فقط ، كما رأينا في المثالين السابقين. ولذلك فغالبا ما تصاغ الخطوة الاستقرائية في الصيغة التالية:

If S(n) is true, then S(n+1) is true

وسواء استخدمنا هذه الصيغة " الدارجة " أو تلك المستخدمة في " الصيغة القوية للاستقراء الرياضي " فنلاحظ أن الخطوة الأساسية (basis step) لا تتغير ، ويمكن إثبات أن صيغتي (2 forms) الاستقراء الرياضي متكافئتان منطقيا (logically equivalent).

(٢) إذا أردنا التحقق من أن العبارات

$$S(n_0), S(n_0+1), \cdots \qquad ; n_0 \neq 1$$

صحيحة (true) ، فيجب أن نغير الخطوة الأساسية إلى:

$$S(n_0) \text{ is true.}$$

بينما تبقى الخطوة الاستقرائية كما هي دون تغيير.

مثال ١–٥٠:

باستخدام الاستقراء اثبت أنه إذا كانت $r \neq 1$ ، فإن

$$a + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1}; \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

[المجمـوع الموجـود في الطـرف الأيسر يطلـق علـيه " مجمـوعا هندسـيا " (a geometric sum) ، وفي أي مجمـوع هندسـي تكـون النسبة بـين أي حـدين متتاليين (2 consecutive terms) $\{ a\,r^{i+1} / ar^{i} = r \}$ ثابتة].

الحل:

الخطوة الأساسية: نحصل عليها في هذه الحالة بوضع n = 0 :

$$a = \frac{a(r^1-1)}{r-1}$$

وهذه العلاقة صحيحة (true).

الخطوة الاستقرائية:

نفرض أن العبارة المعطاة المطلوب إثباتها صحيحة (true) عند n ، أي أن:

$$a + a\,r^1 + a\,r^2 + \cdots + a\,r^n = \frac{a\,(r^{n+1}-1)}{r-1}$$

وبالتالي نحصل على ما يلي:

$$\begin{aligned} a + a\,r^1 + a\,r^2 + \cdots + a\,r^n + a\,r^{n+1} &= \frac{a\,(r^{n+1}-1)}{r-1} + a\,r^{n+1} \\ &= \frac{a\,(r^{n+1}-1)}{r-1} + \frac{a\,r^{n+1}(r-1)}{r-1} \\ &= \frac{a\,(r^{n+2}-1)}{r-1} \end{aligned}$$

أي أن العبارة المعطاة صحيحة أيضا عند (n+1).

وهكذا نكون قد تحققنا من كل من الخطوة الأساسية (المعدلة) (modified basis step) والخطـوة الاسـتقرائية ، وبالتـالي فبمبـدأ الاسـتقراء نكـون قـد أثبتنـا المطلوب.

ومن أمثلة المجاميع الهندسية نأخذ a=1, r=2 لنحصل على الصيغة:

$$1 + +2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} - 1$$

نلاحظ في جميع الأمثلة السابقة أنه حين يُطلب منا استخدام الاستقراء لإثبات صيغة ما فإننا نُعطَى سلفا هذه الصيغة الصحيحة (correct formula) دون أن

نتطرق إلى السؤال: كيف حصلنا على هذه الصيغة ؟ ومن طرق الحصول على مثل هذه الصيغ: التخمين / المحاولة والخطأ عن طريق التجربة ببعض القيم الصغيرة (experimenting with small values) ، ثم محاولة اكتشاف الصيغة ، كما يوضح ذلك المثال التالي.

مثال ١-٥١:

نفرض أن لدينا المجموع

sum = 1 + 3 + 5 + ... + (2n – 1)

أ) احسب قيم هذا المجموع عند n = 1, 2, 3, 4 ، ومن ثم حاول اكتشاف صيغة لهذا المجموع.

ب) استخدم الاستقراء لإثبات صحة هذه الصيغة.

الحل: أ)

| n | 1+3+... + (2n – 1) |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |

نلاحظ من قيم المجموع أنها عبارة عن مربعات الأعداد 1, 2, 3, 4 ، ولذلك نخمِّن أن

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

ب) نترك إثبات صحة هذه الصيغة باستخدام الاستقراء للتمرينات بنهاية هذا الفصل.

ولا يقتصر استخدام الاستقراء على إثبات صيغ المجاميع والتحقق من المتباينات ، وإنما يُستخدم أيضا في تطبيقات أخرى كما يوضح ذلك المثال التالي.

مثال ١-٥٢:

باستخدام الاستقراء اثبت أن $5^n-1$ يقبل القسمة (بدون باقي) على 4 (divisible by) ، وذلك للقيم .n = 1, 2, 3, ...

الحل:

الخطوة الأساسية:

$$n = 1 \Rightarrow 5^n - 1 = 5^1 - 1 = 4 \qquad \text{divisible by 4}$$

الخطوة الاستقرائية:

نفرض أن 4 تَقْسِم (divides) القيمة $5^n - 1$

[أي أن $5^n - 1 = 4k$ حيث k عدد صحيح]

ويكون المطلوب إثبات أن 4 تَقْسِم أيضا القيمة $5^{n+1} - 1$.

$$\begin{aligned} 5^{n+1} - 1 &= 5.5^n - 1 \\ &= 5.5^n - 1 - 5 + 5 \\ &= 5(5^n - 1) + 4 \\ &= 5.4k + 4 = 4(5k + 1) \end{aligned}$$

وحيث أن 5k + 1 عدد صحيح فلذلك 4 تقسم $5^{n+1} - 1$

أو بطريقة أخرى:

$$\begin{aligned} 5^{n+1} - 1 &= 5.5^n - 1 \\ &= 4.5^n + 5^n - 1 \\ &= 4.5^n + 4k = 4.(5^n + k) \end{aligned}$$

وحيث أن $5^n + k$ عدد صحيح فلذلك 4 تقسم $5^{n+1} - 1$

ونظرا لأنه تم التحقق من الخطوتين الأساسية والاستقرائية نكون قد أثبتنا المطلوب وذلك بمبدأ الاستقراء.

مثال ١-٥١:

باستخدام الاستقراء الرياضي اثبت أن بريدا قيمته 4 فلسا أو أكثر يمكن دفع قيمته باستخدام طوابع بريدية من فئتي 2 فلسا و 5 فلسا فقط.

الحل:

قبل إعطاء البرهان الدقيق نناقش أولا فكرة البرهان بالاستقراء ، نفرض أننا الآن في الخطوة الاستقرائية حيث نريد إثبات أن بريدا قيمته (n+1) فلسا يمكن دفع قيمته باستخدام طوابع من فئتي 2 فلسا و5 فلسا فقط. سيكون من السهل إثبات ذلك إذا فرضنا أنه أمكننا تحقيق ذلك لبريد قيمته (n-1) فلسا ، لأنه يمكننا حينئذ

إضافة طابع واحد من فئة 2 فلسا للوصول إلى القيمة (n+1) فلسا. ولذلك إذا استخدمنا الصيغة القوية (strong form) للاستقراء الرياضي فإنه يمكننا فرض صحة العبارة (المطلوب إثباتها في هذا المثال) لجميع القيم $k < n+1$. وبصورة خاصة نفرض صحتها للقيمة $k = n-1$.

تبقى نقطة بسيطة هنا ، وهي أننا في هذا المثال نأخذ في الاعتبار البريد الذي قيمته 4 فلسا أو أكثر. وعندما $n+1 = 5$ فإن $n-1$ لا تكون قيمة صالحة (valid) لأن $4 > n-1$ ، وبالتالي لا يمكننا أن نفرض تحقيق المطلوب لبريد قيمته (n-1) فلسا. ولذلك فبالإضافة إلى الحالة $n = 4$ يجب أن نتحقق (verify) صراحةً (explicitly) من صحة العبارة في الحالة $n = 5$. فقيمة $n-1$ تكون صالحة (valid) فقط عندما $(n+1) \geq 6$ . أي أننا يجب أن نتحقق صراحة من كل من الحالتين $n = 4, n = 5$ . أي أنه يكون لدينا خطوتان أساسيتان.

وعندما نستخدم الصيغة القوية للاستقراء فعادة نكتب البرهان بحيث أننا – في الخطوة الاستقرائية – نبرهن العبارة (المطلوب إثباتها) في الحالة n (بدلا من n+1) ، بفرض صحة العبارة لجميع الحالات السابقة أي لجميع القيم $k < n$.

وبإجراء هذا التعديل نعطي الآن البرهان الدقيق.

الخطوتان الأساسيتان ($n = 4, n = 5$):

للبريد الذي قيمته 4 فلسا نستخدم طابعين من فئة 2 فلسا. وللبريد الذي قيمته 5 فلسا نستخدم طابعا واحداً من فئة 5 فلسا.

الخطوة الاستقرائية:

نفرض أن $n \geq 6$ ، وأن أي بريد قيمته k فلسا أو أكثر يمكن دفع قيمته باستخدام طوابع بريدية من فئتي 2 فلسا و5 فلسا فقط حيث $4 \leq k < n$ . وبهذا الفرض الاستقرائي يمكننا دفع البريد الذي قيمته $n - 2$ فلسا بالطوابع المتوفرة لدينا. فإذا أضفنا لها طابعا واحدا من فئة 2 فلسا أمكننا دفع البريد الذي قيمته n فلسا بالطوابع المتوفرة.

## تمرينات رقم ١

١–١ أي الجمل التالية تعد افتراضات (propositions) ؟ وما هي قيم صحة (truth values) الافتراضات من هذه الجمل ؟

أ) أُنزل القرآن في شهر رمضان.

ب) صم رمضان إيمانا واحتسابا.

ج) $1+5 = 7$

د) $x + 5 > 7$ لأي عدد حقيقي $x$.

هـ) موسى بن نصير هو القائد العام لفتح بلاد الأندلس.

١–٢ حدِّد ما إذا كانت كل جملة من الجمل التالية افتراضا (proposition) أم لا. وإن كانت الجملة افتراضا فاكتب نفيه (negation). [ليس مطلوبا قيم صحة الافتراضات].

أ) $2 + 5 = 10$

ب) قم إلى الصلاة متى سمعت النداء.

ج) for some positive integer n, $19340 = n.17$

د) أي عدد صحيح زوجي أكبر من 4 هو مجموع عددين أوليين.
(every even integer > 4 is the sum of 2 primes)

هـ) الفارق بين عددين أوليين.

١–٣ أوجد قيمة كل من الافتراضات التالية بفرض أن لدينا قيم الصحة (truth values):

$$p = F, \qquad q = T, \qquad r = F$$

أ) $p \vee q$ ب) $\bar{p} \vee \bar{q}$

ج) $\bar{p} \vee q$ د) $\bar{p} \vee \overline{(q \wedge r)}$

هـ) $\overline{(p \vee q)} \wedge (\bar{p} \vee r)$ و) $(p \vee \bar{r}) \wedge \overline{(q \vee r) \vee \overline{(r \vee p)}}$

١–٤ اكتب جدول الصحة لكل افتراض من الافتراضات التالية:

أ) $p \wedge \overline{q}$   ب) $(\overline{p} \vee \overline{q}) \vee p$

ج) $(p \vee q) \wedge \overline{p}$   د) $(p \wedge q) \wedge \overline{p}$

هـ) $(p \wedge q) \vee (\overline{p} \vee q)$   و) $\overline{(p \wedge q)} \vee (r \wedge \overline{p})$

ز) $(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$

ح) $\overline{(p \wedge q)} \vee (\overline{q} \vee r)$

١–٥ **مَثِّل** (represent) **كل عبارة من العبارات التالية رمزيا** (symbolically) **وذلك بفرض أن:**

$$p:\ 5 < 9\,,\quad q:\ 9 < 7\,,\quad r:\ 5 < 7$$

**وكذلك اذكر ما إذا كانت كل عبارة صحيحة** (true) **أم خاطئة** (false).

أ) $5 < 9$ and $9 < 7$

ب) **ليست الحالة أن** ($5 < 9$ and $9 < 7$)

ج) **إما أن** $5 < 9$ **أو أنه ليست الحالة أن** ($9 < 7$ and $5 < 7$)

١–٦ **أعد صياغة** (formulate) **كل تعبير من التعابير الرمزية** (symbolic expressions) **التالية بالكلمات** (in words) ، **وذلك باعتبار أن:**

p : **المقداد يدرس علم الحاسوب.**

q : **المقداد يدرس الرياضيات.**

أ) $\overline{p}$   ب) $p \wedge q$   ج) $p \vee q$

د) $p \vee \overline{q}$   هـ) $p \wedge \overline{q}$   و) $\overline{p} \wedge \overline{q}$

١–٧ **أعد صياغة كل تعبير من التعابير الرمزية التالية بالكلمات ، وذلك باعتبار أن:**

p : **اليوم (يوم) الاثنين.**

q : **الطقس ممطر.**

r : **الطقس حار.**

أ) $p \vee q$   ب) $\overline{p} \wedge (q \vee r)$   ج) $\overline{p \vee q} \wedge r$

د) $(p \wedge q) \wedge \overline{(r \vee p)}$   هـ) $(p \wedge (q \vee r)) \wedge (r \vee (q \vee p))$

**١–٨ مَثِّل كل عبارة من العبارات التالية رمزيا ، بفرض أن:**

p : **هناك إعصار.**

q : **الطقس ممطر.**

أ) **ليس هناك إعصار.**

ب) **هناك إعصار والطقس ممطر.**

ج) **هناك إعصار ولكن الطقس غير ممطر.**

د) **ليس هناك إعصار والطقس غير ممطر.**

هـ) **إما أن هناك إعصارا أو أن الطقس ممطر (أو كلاهما).**

و) **إما أن هناك إعصارا أو أن الطقس ممطر ، ولكن ليس هناك إعصار.**

**١–٩ اكتب جدول الصحة للدالة أو – المتنافية** (exclusive-or) **للافتراضين** p, q **حيث هذه الدالة** p exor q **تكون صحيحة** (true) **إذا كان** p **أو** q **(ولكن ليس كلاهما) صحيحا.**

**١–١٠ أعد صياغة كل افتراض من الافتراضات التالية بحيث يكون في صيغة الافتراض الشرطي:**

if p then q

**إذا كان** p **فإن** q

أ) **سيجتاز خَبَّاب اختبار الرياضيات المتقطعة إذا اجتهد في الدراسة.**

ب) **الخنساء قد تتخرج إذا حصلت على** 160 **وحدة دراسية.**

ج) **شرط ضروري لشرحبيل كي يشتري جهاز حاسوب أن يحصل على** 600 **دينار.**

د) **شرط كافي لحفصة كي تدرس مقرر الخوارزميات أن تجتاز مقرر الرياضيات المتقطعة.**

هـ) **يمكن قراءة البرنامج بسهولة** (program is readable) **فقط إذا** (only if) **بُنِيَ بناءًا جيدا** (is well structured).

١-١١ **اكتب العكس** (converse) **والمكافئ العكسي** (contrapositive) **لكل من الافتراضات الشرطية في السؤال السابق (١-١٠).**

١-١٢ **بفرض أن كلا من** p, r **خاطئ** (false) **، وأن كلا من** q, s **صحيح** (true) ، **أوجد قيمة صحة كل من الافتراضات التالية:**

أ) $p \rightarrow q$     ب) $\overline{p} \rightarrow \overline{q}$

ج) $\overline{p \rightarrow q}$     د) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$

هـ) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$     و) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

ز) $(s \rightarrow (p \wedge \overline{r})) \wedge ((p \rightarrow (r \vee q)) \wedge s)$

ح) $((p \wedge \overline{q}) \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (s \vee \overline{q})$

١-١٣ **نفرض أن لدينا الافتراضات** p, q, r **حيث** p**: صحيح** (true) ، q**: خاطئ** (false) ، r**: حالته** (status) **غير معلومة** (unknown) **في الوقت الحالي.**
**اذكر ما إذا كان كل من الافتراضات التالية صحيحا أم خاطئا أم أن حالته غير معلومة في الوقت الحالي.**

أ) $p \vee r$     ب) $p \wedge r$     ج) $p \rightarrow r$

د) $q \rightarrow r$     هـ) $r \rightarrow p$     و) $r \rightarrow q$

ز) $(p \wedge r) \leftrightarrow r$     ح) $(p \vee r) \leftrightarrow r$     ط) $(q \wedge r) \leftrightarrow r$

ي) $(q \vee r) \leftrightarrow r$

١-١٤ **مَثِّل** (represent) **كلا من العبارات التالية باستخدام الرموز** (symbolically) **بفرض أن:**

$$p:\ 4 < 2\ ,\qquad q:\ 7 < 10\ ,\qquad r:\ 6 < 6$$

أ) If $4 < 2$ , then $7 < 10$

ب) If ($4 < 2$ and $6 < 6$) , then $7 < 10$

ج) If it is not the case that ($6 < 6$ and $7 \nless 10$), then $6 < 6$

د) $7 < 10$ iff ($4 < 2$ and $6 \nless 6$)

(iff $\equiv$ if and only if)

١-١٥ **نفرض أن لدينا الافتراضات التالية:**

p: **اليوم (يوم) الاثنين.**

q: الطقس ممطر.

r: الطقس حار.

أعد صياغة التعابير الرمزية (symbolic expressions) التالية بالكلمات (in words):

أ) $p \to q$ ب) $\overline{q} \to (r \wedge p)$

ج) $\overline{p} \to (q \vee r)$ د) $\overline{(p \vee q)} \leftrightarrow r$

هـ) $(p \wedge (q \vee r)) \to (r \vee (q \vee p))$

و) $(p \vee (\overline{p} \wedge \overline{(q \vee r)})) \to (p \vee \overline{(r \vee q)})$

**١-١٦ اكتب كلا من الافتراضات الشرطية التالية بالرموز (symbolically) واكتب العكس والمكافئ العكسي لكل عبارة بالرموز وبالكلمات. وكذلك أوجد قيمة الصحة لكل افتراض شرطي ولعكسه ولمكافئه العكسي.**

أ) If $4 < 6$, then $9 > 12$

ب) If $4 > 6$ , then $9 > 12$

ج) $|1| < 3$ if $-3 < 1 < 3$

د) $|4| < 3$ if $-3 < 4 < 3$

**١-١٧ لكل زوج P, Q من الافتراضات التالية اذكر ما إذا كان $P \equiv Q$ أم لا.**

أ) $P = p$ , $Q = p \vee q$

ب) $P = p \wedge q$ , $Q = \overline{p} \vee \overline{q}$

ج) $P = p \to q$ , $Q = \overline{p} \vee q$

د) $P = p \wedge (\overline{q} \vee r)$ , $Q = p \vee (q \wedge \overline{r})$

هـ) $P = p \wedge (q \vee r)$ , $Q = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

و) $P = p \to q$ , $Q = \overline{q} \to \overline{p}$

ز) $P = p \to q$ , $Q = p \leftrightarrow q$

ح) $P = (p \to q) \wedge (q \to r)$ , $Q = p \to r$

ط) $P = (p \to q) \to r$ , $Q = p \to (q \to r)$

ي) $P = (s \to (p \wedge \overline{r})) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s)$ , $Q = p \vee t$

**١–١٨ نفرض أننا سنعرِّف جدول الصحة لأداة ربط imp1 كما يلي:**

| p | q | p imp1 q |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

**اثبت أن** $p \text{ imp1 } q \equiv q \text{ imp1 } p$

**١–١٩ نفرض أننا سنعرِّف جدول الصحة لأداة ربط imp2 كما يلي:**

| p | q | p imp2 q |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | F |

**أ) اثبت أن**

$$(p \text{ imp2 } q) \wedge (q \text{ imp2 } p) \not\equiv p \leftrightarrow q$$

**ب) اثبت أن العلاقة المذكورة في أ) تظل صحيحة إذا غيَّرنا** imp2 **بحيث أنه عندما تكون** p **خاطئة** (F) **و** q **صحيحة** (T) **فإن** p imp2 q **تكون خاطئة** (F).

**١–٢٠ حقِّق قانون دي مورجان الثاني:**

$$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$$

**١–٢١ باستخدام جدول الصحة اثبت أن**

$$(p \to q) \equiv (\overline{p} \vee q)$$

**١–٢٢ اذكر ما إذا كانت كل عبارة من العبارات التالية دالة افتراضية** (a propositional function) **أم لا. وإن كانت دالة افتراضية فاذكر مجال تطبيقها** (domain of discourse).

**أ)** $(2n+1)^2$ **عدد صحيح فردي.**

**ب) اختر عددا صحيحا بين** 1 **و** 10.

**ج) افرض أن** x **عدد حقيقي.**

**د) الكتاب فاز بجائزة أفضل كتاب في العلوم مؤلف بالعربية.**

**هـ)** $1+3=4$

و) $\exists x \ni x < y \quad (x, y \text{ real numbers})$

١–٢٣ نفرض أن $P(n)$ هي الدالة الافتراضية: "n تَقْسِم 77" (n divides 77).
اكتب كل افتراض فيما يلي بالكلمات ، واذكر ما إذا كان صحيحا (true) أم خاطئا (false). مجال التطبيق هو مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

أ) $P(11)$ ب) $P(1)$ ج) $P(3)$

د) for every n, $P(n)$ هـ) for some n, $P(n)$

١–٢٤ نفرض أن $T(x, y)$ هي الدالة الافتراضية: "x أطول من y" (x is taller than y). ومجال التطبيق يتكون من ثلاثة أشخاص: عَمّار وطوله: 5 أقدام و11 بوصة ، وأسامة وطوله: 5 أقدام و6 بوصات ، وزيد وطوله: 6 أقدام.

(i) اكتب كل افتراض من الافتراضات التالية بالكلمات ، واذكر ما إذا كان صحيحا (true) أم خاطئا.

(ii) اكتب نفي (negation) كل افتراض بالكلمات وبالرموز.

أ) $\forall x \quad \forall y \quad T(x, y)$ ب) $\forall x \quad \exists y \quad T(x, y)$

ج) $\exists x \quad \forall y \quad T(x, y)$ د) $\exists x \quad \exists y \quad T(x, y)$

١–٢٥ نفرض أن $L(x, y)$ هي الدالة الافتراضية: "x يحب y في الله"* (x loves y for the sake of Allah). ومجال التطبيق هو جميع البشر (all living people / كل الناس).

i) اكتب كلا من الافتراضات التالية بالرموز. أيها تعتقد صحته ؟

ii) اكتب نفي كل افتراض بالكلمات وبالرموز.

أ) شخص ما يحب كل الناس في الله.
someone loves everybody for the sake of Allah.

ب) كل الناس يحبون كل الناس في الله.
everybody loves everybody for the sake of Allah.

ج) شخص ما يحب شخصا ما في الله.

---

* قال رسول الله صلى الله عليه وسلم:"أوثق عرى الإيمان: الحب في الله والبغض في الله" (الطبراني – حديث حسن).

someone loves someone for the sake of Allah.

د) كل الناس يحبون شخصا ما في الله.

everybody loves somebody for the sake of Allah.

١–٢٦ نفرض أن P(x,y) هي الدالة الافتراضية $x \ge y$ . ومجال التطبيق هو مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

i) اذكر ما إذا كان كل من الافتراضات التالية صحيحا أم خاطئا.

ii) اكتب نفي كل افتراض.

أ) $\forall x \quad \forall y \quad P(x, y)$ ب) $\forall x \quad \exists y \quad P(x, y)$

ج) $\exists x \quad \forall y \quad P(x, y)$ د) $\exists x \quad \exists y \quad P(x, y)$

١–٢٧

i) اذكر مع التعليل قيمة صحة كل من العبارات التالية. مجال التطبيق هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

ii) اكتب نفي كل من هذه العبارات / الافتراضات.

أ) $\forall x \quad x^2 > x$ ب) $\exists x \quad x^2 > x$

ت) $\forall x \text{ if } x > 1, \text{ then } x^2 > x$ ث) $\exists x \text{ if } x > 1, \text{ then } x^2 > x$

ج) $\forall x \text{ if } x > 1, \text{ then } x/(x^2 + 1) < 1/3$

ح) $\exists x \text{ if } x > 1, \text{ then } x/(x^2 + 1) < 1/3$

خ) $\forall x \, \forall y \;\; x^2 < y + 1$ د) $\forall x \, \exists y \;\; x^2 < y + 1$

ذ) $\exists x \, \forall y \;\; x^2 < y + 1$ ر) $\exists x \, \exists y \;\; x^2 < y + 1$

ز) $\exists y \, \forall x \;\; x^2 < y + 1$ س) $\forall y \, \exists y \;\; x^2 < y + 1$

ش) $\forall x \, \forall y \;\; x^2 + y^2 = 9$ ص) $\forall x \, \exists y \;\; x^2 + y^2 = 9$

ض) $\exists x \, \forall y \;\; x^2 + y^2 = 9$ ط) $\exists x \, \exists y \;\; x^2 + y^2 = 9$

ظ) $\forall x \, \forall y \;\; x^2 + y^2 \ge 0$ ع) $\forall x \, \exists y \;\; x^2 + y^2 \ge 0$

غ) $\exists x \, \forall y \;\; x^2 + y^2 \ge 0$ ف) $\exists x \, \exists y \;\; x^2 + y^2 \ge 0$

ق) $\forall x \, \forall y \text{ if } x < y, \text{ then } x^2 < y^2$

ك) $\forall x\ \exists y$ if $x < y$, then $x^2 < y^2$

ل) $\exists x\ \forall y$ if $x < y$, then $x^2 < y^2$

م) $\exists x\ \exists y$ if $x < y$, then $x^2 < y^2$

١-٢٨

أ) نفرض أن العبارة $\forall x\ \forall y\ P(x, y)$ صحيحة (true)، وأن مجال التطبيق غير خالي (nonempty). أي العبارات التالية تعد صحيحة ؟ إن كانت العبارة صحيحة فاذكر السبب ، وإن لم تكن فاعط مثالا مناقضا.

i) $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$

ii) $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$

iii) $\exists x\ \exists y\ P(x, y)$

ب) أعـد حـل السـؤال أ) بفـرض أن العبـارة الصـحيحة هـي $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$ ، وأن العبارات المطلوب اختبار صحتها هي:

i) $\forall x\ \forall y\ P(x, y)$

ii) $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$

iii) $\exists x\ \exists y\ P(x, y)$

ج) أعـد حـل السـؤال أ) بفـرض أن العبـارة الصـحيحة هـي $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$ ، وأن العبارات المطلوب اختبار صحتها هي:

i) $\forall x\ \forall y\ P(x, y)$

ii) $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$

iii) $\exists x\ \exists y\ P(x, y)$

د) أعـد حـل السـؤال أ) بفـرض أن العبـارة الصـحيحة هـي $\exists x\ \exists y\ P(x, y)$ ، وأن العبارات المطلوب اختبار صحتها هي:

i) $\forall x\ \forall y\ P(x, y)$

ii) $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$

iii) $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$

١-٢٩ أي العبارات التالية تكافئ منطقيا العبارة $\overline{\forall x\ \exists y\ P(x, y)}$ ؟ اذكر السبب.

أ) $\exists x \ \overline{\forall y \ P(x, y)}$ ج) $\exists x \ \forall y \ \overline{P(x, y)}$

ب) $\forall x \ \overline{\exists y \ P(x, y)}$ د) $\exists x \ \exists y \ \overline{P(x, y)}$

١-٣٠

أ) **باستخدام جدول الصحة اثبت أنه إذا كان $p, \ q$ افتراضين ، فإن واحدا من الافتراضين الشرطيين $p \to q, \ q \to p$ يكون صحيحا.**

ب) **نفرض أن** P(x) **يمثل الدالة الافتراضية : "** x **عدد نسبي"** (x is a rational number) **، ونفرض أن** Q(x) **يمثل الدالة الافتراضية: "** x **عدد موجب"** (x is a positive number)**. ومجال التطبيق هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية. عَلِّق** (Comment) **على الحُجَّة** (argument) **التالية التي تثبت نتيجة نعلم أنها خاطئة.**

**باستخدام الجزء (أ) من السؤال:**

$$\forall x \quad (P(x) \to Q(x)) \vee (Q(x) \to P(x))$$

**عبارة صحيحة** (true)

**وبالكلمات فهذه العبارة تعني:**

**لجميع قيم** x**: إذا كان** x **عددا نسبيا فإن** x **عدد موجب ،**

**أو إذا كان** x **عددا موجبا فإن** x **عدد نسبي.**

**ولذلك فإن جميع الأعداد النسبية موجبة او أن جميع الأعداد الحقيقية الموجبة نسبية.**

١-٣١ **علِّل كل خطوة من خطوات البرهان المباشر التالي الذي يثبت أنه:**

**إذا كان** x **عددا حقيقيا فإن** $x.0 = 0$

**افرض أن لدينا النظريات (المعلومة سلفا) التالية:**

**إذا كان** $a, b, c$ **أعدادا حقيقية فإن:**

(i $b + 0 = b$

(ii $a(b+c) = ab + ac$

(iii $[a + b = a + c] \Rightarrow b = c$

البرهان:

$$x.0 + 0 = x.0 = x.(0 + 0) = x.0 + x.0$$

$$\Rightarrow x.0 = 0$$

١-٣٢ علِّل كل خطوة من خطوات البرهان غير المباشر (البرهان بالتناقض) التالي الذي يثبت أنه:

إذا كان $x\,y = 0$ فإن $x = 0$ أو $y = 0$

افرض أنه إذا كان $a, b, c$ أعدادا حقيقية فإن

$$[ab = ac \ \ \& \ \ a \neq 0] \ \Rightarrow \ b = c$$

البرهان: نفرض أن

$$xy = 0 \quad \& \quad x \neq 0 \quad \& \quad y \neq 0$$

نظرا لأن

$$xy = 0 = x.0 \quad \& \quad x \neq 0$$

لذلك فإن $y = 0$ وهذا تناقض.

١-٣٣ اثبت بإعطاء برهان بالتناقض أنه إذ وُضِعت مائة كرة في تسعة صناديق فإن صندوقا ما سيحتوي على 12 كرة أو أكثر.

١-٣٤ اثبت بإعطاء برهان بالتناقض أنه إذا وُزِّعت 40 قطعة نقد معدنية (coins) على تسع حافظات نقود (bags) بحيث تحتوي أي حافظة على الأقل على قطعة واحدة ، فإن حافظتين على الأقل ستحتويان على العدد نفسه من القطع المعدنية.

١-٣٥ أعد صياغة الحجج التالية مستخدما الرموز مع بيان إن كانت الحجة صالحة (valid) أم لا. افرض أن

p: I study hard. q: I get A's
r: I get rich.

(أ)

If I study hard, then I get A's.
I study hard.
―――――――――――――
$\therefore$ I get A's

(ب)

If I study hard, then I get A's.
If I don't get rich, then I don't get A's
$\therefore$ I get rich

(ج)

I study hard if and only if I get rich.
I get rich
$\therefore$ I study hard.

(د)

If I study hard or I get rich, then I get A's.
I get A's
$\therefore$ If I don't study hard, then I get rich.

(هـ)

If I study hard, then I get A's or I get rich.
I don't get A's and I don't get rich.
$\therefore$ I don't study hard.

**١-٣٦ اكتب كلا من الحجج التالية بالكلمات ، وحدد ما إذا كانت كل حجة صالحة أم لا. افرض أن**

p: 4 megabytes is better than no memory at all.
q: We will buy more memory.
r: We will buy a new computer.

أ)

$$p \to r$$
$$p \to q$$
$$\therefore p \to (r \wedge q)$$

ب)

$$p \to (r \vee q)$$
$$r \to \bar{q}$$
$$\therefore p \to r$$

ج)

$$p \to r$$
$$p \to q$$
$$\therefore q$$

د)

$$\bar{r} \to \bar{p}$$
$$r$$
$$\therefore p$$

هـ)

$$\begin{array}{l} p \to r \\ r \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

١-٣٧ بَيِّن ما إذا كانت كل حجة من الحجج التالية صالحة أم لا.

أ)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \overline{p} \\ \hline \therefore \overline{q} \end{array}$$

ب)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \overline{q} \\ \hline \therefore \overline{p} \end{array}$$

ج)

$$\begin{array}{l} p \wedge \overline{p} \\ \hline \therefore q \end{array}$$

د)

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ q \to (p \to r) \\ \hline \therefore (p \vee q) \to r \end{array}$$

هـ)

$$\begin{array}{l} (p \to q) \wedge (r \to s) \\ p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$$

و)

$$\begin{array}{l} p \to q \vee r \\ p \vee \overline{q} \\ r \vee q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

١-٣٨ اثبت أنه إذا كانت الحجتان

$$p_1, p_2 / \therefore p \qquad \& \qquad p, p_3, \cdots, p_n / \therefore c$$

صالحتين ، فإن الحجة

$$p_1, p_2, \cdots, p_n / \therefore c$$

ستكون أيضا صالحة.

١-٣٩ اذكر قاعدة الاستدلال المستخدمة في كل من الحجج التالية:

أ) السباحة رياضة مفضلة. ولذلك فإن السباحة رياضة مفضلة أو إن الرماية رياضة مفضلة.

ب) إذا كانت السباحة رياضة مفضلة فإن الرماية رياضة مفضلة. السباحة رياضة مفضلة. ولذلك فإن الرماية رياضة مفضلة.

ج) ركوب الخيل رياضة مفضلة أو البلياردو رياضة مفضلة. البلياردو ليس رياضة مفضلة. ولذلك ركوب الخيل رياضة مفضلة.

د) أي عدد نسبي (rational number) تكون صيغته p/q ، حيث كل من p, q عدد صحيح. ولذلك فإن 9.345 صيغته p/q.

١–٤٠ باستخدام قواعد الاستدلال اعط حجة تثبت أن الاستنتاج (conclusion) المذكور يتبع (ينتج من) الفروض (hypotheses) المعطاة في كل مما يلي:

أ) الفروض: إذا كان هناك وقود [بنزين (gas)] في السيارة ، فسأذهب إلى المسجد الأبعد والأكثر جمعا. إذا ذهبت إلى المسجد الأبعد والأكثر جمعا فسأحضر الدرس الأسبوعي. هناك وقود في السيارة.
الاستنتاج: سأحضر الدرس الأسبوعي.

ب) الفروض: إذا كان هناك وقود في السيارة ، فسأذهب إلى المسجد الأبعد والأكثر جمعا. إذا ذهبت إلى المسجد الأبعد والأكثر جمعا فسأحضر الدرس الأسبوعي. لم أحضر الدرس الأسبوعي.
الاستنتاج: ليس هناك وقود في السيارة أو هناك خلل في جهاز نقل الحركة بالسيارة (car transmission is defective).

ج) الفروض: إذا حفظ المثنى كتاب الله تعالى أو استطاع الحارث ترتيل القرآن ترتيلا صحيحا فسأشتري القرص المضغوط (compact disk). المثنى حفظ كتاب الله تعالى. سأشتري جهاز تشغيل الأقراص المضغوطة (compact disc player).
الاستنتاج: سأشتري القرص المضغوط وجهاز تشغيل الأقراص المضغوطة.

د) الفروض: أي طالب في الفصل عنده كتاب نماذج حلول التمرينات. أي طالب عنده كتاب نماذج حلول التمرينات يستطيع فهم مادة الرياضيات المتقطعة جيدا.

الاستنتاج: هُمام – الذي هو طالب في الفصل – يستطيع فهم مادة الرياضيات المتقطعة جيدا.

هـ) الفروض: القعقاع – والذي هو عضو في كتائب حطين – يستطيع إطلاق صواريخ القسام لمسافات بعيدة. كل من يستطيع إطلاق صواريخ القسام لمسافات بعيدة يلقي الرعب في قلوب الأعداء.

الاستنتاج: عضو ما في كتائب حطين يلقي الرعب في قلوب الأعداء.

و) الفروض: أي طالب في شعبة الرياضيات المتقطعة يحب طلب العلم في هذا التخصص. طالب ما في شعبة الرياضيات المتقطعة لم يدرس نظرية المعلومات من قبل.

الاستنتاج: طالب ما يحب طلب العلم في تخصص الرياضيات المتقطعة لم يدرس نظرية المعلومات من قبل.

١–٤١ اثبت صحة / صلاحية (validity) قواعد الاستدلال التالية:

أ) " مودس تولنز ".　　ب) الإضافة.

ج) التبسيط.　　د) العطف.

هـ) القياس المنطقي الفرضي.　　و) القياس المنطقي الفَصْلي.

١–٤٢ اثبت صلاحية قواعد الاستدلال التالية بالنسبة للعبارات المسورة:

أ) التعميم الشمولي.　　ب) الاختيار الوجودي عند عنصر.

ج) التعميم الوجودي.

١–٤٣ باستخدام الاستقراء تحقق من صحة كل معادلة من المعادلات التالية ، وذلك لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n.

أ) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

ب) $1.2+2.3+3.4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)\,(n+2)}{3}$

ج) $1(1!)+2(2!)+\cdots+n(n!)=(n+1)!-1$

د) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}$

هـ) $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n+1}n^2=\frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$

و) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

ز) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

ح) $\frac{1}{2.4}+\frac{1.3}{2.4.6}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8}+\cdots+\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n+2)}=$
$\frac{1}{2}-\frac{1.3.5\cdots(2n+1)}{2.4.6\cdots(2n+2)}$

ط) $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}$
$-\frac{1}{2(n+2)}$

**١-٤٤ باستخدام الاستقراء تحقق من صحة كل من المتباينات التالية:**

أ) $\frac{1}{2n}\le\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}, \; n=1, 2, \cdots$

ب) $\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \; n=1, 2, \cdots$

ج) $2n+1\le 2^n, \; n=3, 4, \cdots$

د) $2^n\ge n^2, \; n=4, 5, \cdots$

هـ) $(1+x)^n\ge 1+nx$, for $x\ge -1$ and $n=1, 2, \cdots$

**١-٤٥ باستخدام الاستقراء اثبت كلا من العبارات التالية:**

أ) $7^n-1$ **تقبل القسمة على** 6 (divisible by) ، **وذلك للقيم** $n=1, 2, \ldots$.

ب) $11^n-6$ **تقبل القسمة على** 5 ، **وذلك للقيم** $n=1, 2, \ldots$.

ج) $6.7^n - 2.3^n$ تقبل القسمة على 4 ، وذلك للقيم $n = 1, 2, \ldots$ .

د) $3^n + 7^n - 2$ تقبل القسمة على 8 ، وذلك للقيم $n = 1, 2, \ldots$ .

١-٤٦ عن طريق التجربة (experimenting) بقيم صغيرة للعدد n خَمِّن صيغة للمجموع التالي

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

ثم استخدم الاستقراء للتحقق من هذه الصيغة.

١-٤٧ استخدم الاستقراء لإثبات أن خطوطا مستقيمة (straight lines) عددها n في المستوى تقسم المستوى إلى عدد $(n^2 + n + 2)/2$ من المناطق (regions). افرض أنه لا يوجد خطان متوازيان ، وكذلك لا توجد ثلاثة خطوط متقاطعة في نقطة مشتركة.

١-٤٨ باستخدام الاستقراء اثبت أن

أ) بريدا قيمته 6 فلسا أو أكثر يمكن دفع قيمته باستخدام طوابع بريدية من فئة 2 فلسا وفئة 7 فلسا فقط.

ب) بريدا قيمته 24 فلسا أو أكثر يمكن دفع قيمته باستخدام طوابع بريدية من فئة 5 فلسا وفئة 7 فلسا فقط.

١-٤٩ باستخدام الصيغة التالية للخطوة الاستقرائية

If S(n) is true, then S(n+1) is true

أ) أعد حل مثال ١-٥١.

ب) أعد حل السؤال ١-٤٨-أ)

ج) أعد حل السؤال ١-٤٨-ب)

١-٥٠ نفرض أن $S_n = (n+2)(n-1)$ قد اقتُرِحت خطأً (incorrectly) كصيغة (formula) للمجموع

$$2 + 4 + \ldots + 2n$$

اثبت أن الخطوة الاستقرائية متحققة (satisfied) ، بينما الخطوة الأساسية غير متحققة.

١–٥١ باستخدام الاستقراء الرياضي اثبت أن

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}<\frac{n^2}{n+1} \qquad \forall n \ge 2$$

١–٥٢ نفرض أن لدينا التعريف

$$H_k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}; \qquad k \ge 1$$

باستخدام الاستقراء اثبت أن

أ) $H_{2^n} \ge 1+\frac{n}{2} \qquad \forall n \ge 0$

ب) $H_{2^n} \le 1+n \qquad \forall n \ge 0$

ج) $H_1+H_2+\cdots+H_n = (n+1)H_n - n \qquad \forall n \ge 1$

١–٥٣ باستخدام الاستقراء اثبت صحة كل من العبارات التالية لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n

(i) $2+4+\cdots+2n = n(n+1)$

(ii) $2^2+4^2+\cdots+(2n)^2 = \frac{2n(n+1)\,(2n+1)}{3}$

(iii) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!} = 1-\frac{1}{(n+1)!}$

(iv) $2^{n+1} < 1+(n+1)2^n$

# الفصل الثاني

## لغة الرياضيات
## The Language of Mathematics

يتنـــاول هـــذا الفصـــل موضـــوعات: المجموعـــات (sets) ، والمتتاليـــات (sequences) ، والعلاقـــات (relations) ، والـــدوال (functions) ، وكلـــها مـــن المفـاهيم الأساسـية الـتي تسـتخدمها الرياضـيات والموضـوعات الـتي تعتمـد علـى الرياضيات كعلم الحاسوب.

والمجموعة هي عدة أشياء (collection of objects). وتتعرض الرياضيات المتقطعة لدراسة بنيات (structures) مثـل الرسـوم البيانيـة (graphs) [وهـي عبـارة عـن مجموعـات مـن الـرؤوس والأضـلاع (sets of vertices and edges)] ، والجـبر المنطقـي (Boolean algebra) [وهـو مجموعـة عناصر معرَّف عليها بعض العمليات (operations)].

وأما المتتالية فإنها – بعكس المجموعة – تأخذ في الاعتبار ترتيب العناصر. وكمثال للمتتالية: قائمة الحروف كما تظهر في كلمة ما. فواضح أن الترتيب مهم لأن كلمة " كتاب " – على سبيل المثال – تختلف عن كلمة " كاتب ".

وأما العلاقة فهي مجموعة من أزواج مرتبة (ordered pairs). ووجـود الـزوج المرتب (a, b) في علاقة ما يُفسَّر على أنه يشير إلى علاقة من a إلى b.

وأما الدالة – والتي هي نوع خاص من العلاقة – فإنها تسـند (assigns) لكـل عنصر في مجموعة X عنصرا واحدا بالضبط من مجموعة Y. وتُستخدَم الدوال كثيرا في الرياضيات المتقطعة. فمثلا تستخدم الدوال في تحليل (analyzing) الوقت اللازم لتنفيذ الخوارزميات.

## أولا: المجموعات
## Sets

يعـد مفهـوم المجموعـات أساسـيا في الرياضـيات والتطبيقـات الرياضـية. والمجموعة ببساطة هي أي جماعة / عدة أشياء (collection of objects). وإذا كانت المجموعة محدودة (finite) وليست كبيرة جدا فيمكننا وصفها (describing it) بسرد عناصرها ، مثل

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

وتتحدد أي مجموعة بعناصرها وليس بأي ترتيب معين تظهر به العناصر في قائمتها. فمثلا يمكن تحديد (specifying) / وصف المجموعة A السابقة هكذا:

$$A = \{1, 3, 4, 2\}$$

والعناصر التي تكوِّن أي مجموعة يفترض أن تكون مختلفة (distinct). ورغم إمكانية احتواء قائمة العناصر على أي عناصر مكررة لسبب ما ، إلا أننا نضع أي عنصر مرة واحدة فقط في المجموعة (set). فمثلا المجموعة A السابقة يمكـن أن توصف أيضا كما يلي:

$$A = \{1, 2, 2, 3, 4\}$$

وإذا كانت المجموعة محدودة ولكنها كبيرة (large finite set) ، أو كانت لا نهائية (infinite set) ، فيمكننا وصف المجموعة بذكر الخاصية (property) / الصفة المميزة لعناصرها. فمثلا المعادلة

$$B = \{ x \mid x \text{ is a positive even integer}\}$$

تصف المجموعة B المكـونة من جميع الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة ، أي الأعداد ... ,2, 4, 6.

وإذا كانـت X مجموعـة محـدودة فإننـا نسـتخدم الاصـطلاح |X| ليعني عـدد العناصر في المجموعة X.

$$| X | = \text{number of elements in } X.$$

والمجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر يطلـق عليهـا المجموعـة الخاليـة / الخاوية (**empty/null/void set**) ، ونرمز لها بالرمز $\phi$ ، أي أن $\{\ \} = \phi$ . ويقـال

إن مجموعتين $X, Y$ متساويتان ونكتب $X = Y$ إذا احتوت المجموعتان على العناصر نفسها. وبأسلوب آخر فإن $X = Y$ إذا تحقق الشرط:

$$[x \in X \Rightarrow x \in Y \quad \& \quad x \in Y \Rightarrow x \in X]$$

فمثلا إذا كانت

$$A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}, \quad B = \{2, -3\}$$

فإن $A = B$

تعريف:

يقال إن المجموعة $X$ **مجموعة جزئية (subset)** من المجموعة $Y$ ونكتب $X \subseteq Y$ إذا تحقق الشرط

$$x \in X \Rightarrow x \in Y \qquad \forall x \in X$$

فمثلا إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , $C = \{1, 3\}$ فإن $C \subseteq A$

واضح أن أي مجموعة $X$ هي مجموعة جزئية من نفسها ، أي أن $X \subseteq X$ .

تعريف:

يقال إن $X$ **مجموعة جزئية فعلية (proper subset)** من مجموعة $Y$ إذا كانت: $(X \subseteq Y \quad \& \quad X \neq Y)$

واضح أن المجموعة الخالية $\phi$ مجموعة جزئية من أي مجموعة.

تعريف:

**مجموعة قوى (power set)** مجموعة ما $X$ – ونرمز لها بالرمز $P(x)$ – هي مجموعة جميع المجموعات الجزئية (الفعلية أو غير الفعلية) من المجموعة $X$.

مثلا إذا كانت $A = \{a, b, c\}$ ، فإن

$$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

ونلاحظ أن جميع عناصر المجموعة $P(A)$ – باستثناء $\{a, b, c\}$ – هي مجموعات جزئية فعلية من $A$.

وبالنسبة لهذه المجموعة $A$ فإن

$$|A| = 3, \quad |P(A)| = 8 \quad (= 2^3)$$

وفيما يلي نبرهن أن هذه النتيجة عامة ، بمعنى أنه إذا كانت X مجموعة عدد عناصرها n فإن P(x) (وهي مجموعة قوى X) مجموعة عدد عناصرها $2^n$ .

**نظرية ٢–١:**

إذا كانت $|X| = n$ فإن

$$|P(X)| = 2^n \qquad (*)$$

**البرهان:**

نبرهن النظرية بالاستقراء بالنسبة للعدد n.

**الخطوة الأساسية:** إذا كانت $n = 0$ ، أي أن $|X| = 0$ ، فإن X هي المجموعة الخالية ، وحيث أن المجموعة الجزئية الوحيدة من المجموعة الخالية هي المجموعة الخالية نفسها ، فإن

$$|P(X)| = 1 \qquad (= 2^0)$$

أي أن العلاقة (*) صحيحة عند $n = 0$.

**الخطوة الاستقرائية:** نفرض أن العلاقة (*) صحيحة بالنسبة للقيمة n. ونفرض أن X مجموعة تحتوي على $n + 1$ عنصر. ويكون المطلوب إثبات أن $|P(X)| = 2^{n+1}$.

نختار عنصرا x حيث $x \in X$ . فنجد أن نصف المجموعات الجزئية من X تحتوي أي منها على x ، بينما نصفها الآخر لا تحتوي أي منها على x. [مثلا يمكننا تقسيم المجموعات الجزئية من $X = \{a, b, c\}$ إلى نصفين:

| المجموعات الجزئية من X التي تحتوي على a | المجموعات الجزئية من X التي لا تحتوي على a |
|---|---|
| $\{a\}$ | $\phi$ |
| $\{a, b\}$ | $\{b\}$ |
| $\{a, c\}$ | $\{c\}$ |
| $\{a, b, c\}$ | $\{b, c\}$ |

ونلاحظ أن أي مجموعة جزئية في العمود الأيسر يمكن الحصول عليها من المجموعة الجزئية المقابلة لها في العمود الأيمن بحذف العنصر a منها] والسبب في

ذلك هو أننا إذا أخذنا أي مجموعة جزئية S من X بحيث تحتوي على x فإننا نلاحظ أن S تقابلها مجموعة جزئية $S'$ واحدة فقط من X لا تحتوي على x ونحصل على $S'$ بحذف x من S ، وبذلك يمكننا القول بأن لدينا أزواجا (pairs) من مثل هاتين المجموعتين الجزئيتين $(S, S')$. وهكذا نستنتج أن نصف المجموعات الجزئية من X بالضبط تحتوي على x ، ونصف المجموعات الجزئية من X بالضبط لا تحتوي على x.

فإذا فرضنا أن Y ترمز إلى المجموعة التي نحصل عليها من المجموعة X بحذف x ، فإن عدد عناصر Y يساوي n. وبالتالي فإن $|P(Y)| = 2^n$ [بالفرض الاستقرائي (inductive assumption)]. ولكن المجموعات الجزئية من Y هي نفسها بالضبط المجموعات الجزئية من X التي لا تحتوي على x. ومن النقاش في الفقرة السابقة نستنتج أن

$$|P(Y)| = \frac{|P(X)|}{2}$$

وهذا يعني أن

$$|P(X)| = 2|P(Y)| = 2.2^n = 2^{n+1}$$

أي أن العلاقة (*) صحيحة أيضا عند n+1 ، وهذا يكمل برهان الخطوة الاستقرائية. وهكذا بمبدأ الاستقراء الرياضي نستنتج أن العلاقة (*) صحيحة لجميع القيم $n \geq 0$ ، وهو المطلوب إثباته.

**تعريفات:**

نفرض أن X, Y مجموعتان.

(*) **اتحاد (union)** المجموعتين X, Y:

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \quad \text{or} \quad x \in Y\}$$

(*) **تقاطع (intersection)** المجموعتين X, Y:

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \quad \text{and} \quad x \in Y\}$$

(*) يقال إن المجموعتين X, Y **متباعدتان / منفصلتان (disjoint)** إذا كان

$$X \cap Y = \phi$$

(*) **يقال إن " مجموعة من مجموعات** S " (collection of sets) **متباعدة / منفصلة زوجاً زوجاً (pairwise disjoint) إذا تحقق الشرط:**

$$\left(X \in S,\ Y \in S,\ X \neq Y\right) \Rightarrow X \cap Y = \phi \cdots \forall\ X, Y \in S$$

**أي أن أي مجموعتين مختلفتين** X, Y **في المجموعة** S **متباعدتان.**

(*) **الفرق (difference) / المتمِّم النسبي (relative complement)** X-Y **هو مجموعة جميع عناصر** X **التي لا تنتمي إلى** Y **، أي أن:**

$$X - Y = \left\{\ x \mid x \in X \quad \text{and} \quad x \notin Y\ \right\}$$

**مثلا إذا كانت** A = {1, 3, 5} ,   B = {4, 5, 6}

**فإن:**

$A \cap B = \{5\},$ $\qquad A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\},$

$B - A = \{4, 6\}$ $\qquad A - B = \{1, 3\}$

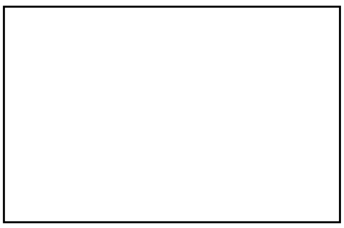
**المجموعتان** {1, 4, 5} , {2, 6} **متباعدتان.**

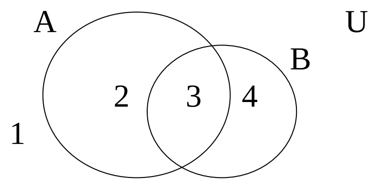
**مجموعة المجموعات** S = {{1, 4, 5}, {2, 6}, {3}, {7, 8}} **متباعدة زوجا زوجا.**

**أحيانا نتعامل مع مجموعات تعد جميعها مجموعات جزئية من مجموعة** U. **هذه المجموعة** U **يطلق عليها " مجموعة شاملة " (a universal set / a universe). والمجموعة** U **يجب أن تعطَى صراحة أو أن تُستنتج من السياق. وإذا أُعطينا مجموعة شاملة** U **ومجموعة جزئية** X **من** U **فإن المجموعة** U-X **يُطلَق عليها متمم** X **(complement of) ، وتُكتَب** $\overline{X}$ **. فمثلا إذا فرضنا أن** $A = \{1, 3, 5\}$ **وكانت** U **مجموعة شاملة حيث** $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **فإن** $\overline{A} = \{2, 4\}$ **، بينما إذا كانت** U **هي** $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ **فإن** $\overline{A} = \{7, 9\}$ **. أي أن المتمم يعتمد على المجموعة الشاملة.**

**شكل فن Venn diagram**

**هذا الشكل يعطي صورة تصويرية** (pictorial view) **للمجموعات. وفيه يرمز مستطيل إلى المجموعة الشاملة (انظر الشكل التالي) ، وترمز دوائر إلى المجموعات**






**شكل فن**

**الجزئيـة مـن المجموعـة الشـاملة. ومـا هـو داخـل أي دائـرة يمثـل عناصـر هـذه المجموعة فمثلا في هذا الشكل: العناصر في المنطقة 1 هي العناصر التي لا تنتمي إلى المجموعة A ولا تنتمي إلى المجموعة B. وعناصر المنطقة 2 هـي عـناصر A-B ، وعناصر المنطقة 3 هي عناصر $A \cap B$ ، وعناصر المنطقة 4 هي عناصر B-A.**

**وعمومـا يمكـن اسـتخدام أشـكال فـن لتوضـيح وإثبـات بعـض خـواص المجموعات.**

**نظرية ٢-٢:**

**نفـرض أن U مجموعـة شـاملة ، وأن A, B, C مجموعـات جزئيـة مـن U. الخواص التالية دائما صحيحة.**

أ) **قانونا التجميع** (Associative laws)

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

ب) **قانونا التبادل** (Commutative laws)

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

ج) **قانونا التوزيع** (Distributive laws)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

د) **قانونا التطابق** (Identity laws)

$$A \cup \phi = A, \quad A \cap U = A$$

ه) **قانونا التمام** (Complement laws)

$$A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \phi$$

و) **قانونا الجمود** (Idempotent laws)

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

ز) **قانون الحدود** (Bound laws)

$$A \cup U = U, \quad A \cap \phi = \phi$$

ح) **قانونا الامتصاص** (Absorption laws)

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$$

ط) **قانون الرَّفْع** (Involution law)

$$\overline{\overline{A}} = A$$

ي) **قانونا** 0/1 (0/1 laws)

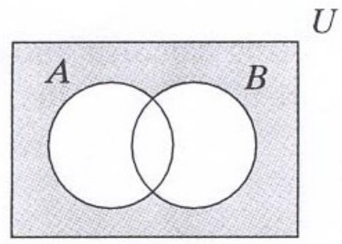
$$\overline{\phi} = U, \qquad \overline{U} = \phi$$

ك) **قانونا دي مورجان للمجموعات** (De Morgan's laws for sets)

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

**البرهان:**

**نكتفي بإثبات القانون الأول من قانوني دي مورجان ، وذلك باستخدام شكل فن وتخطيط كل من $\overline{(A \cup B)}$ و $\overline{A} \cap \overline{B}$ فنجد أن هاتين المجموعتين متساويتان (انظر الشكل).**




**المنطقة المظللة تصور كلا من**

$$\overline{(A \cup B)} \;, \; \overline{A} \cap \overline{B}$$

**تعريف:**

**اتحاد عائلة اختيارية** S **من مجموعات** (union of an arbitrary family of sets):

$$\cup S = \{x \mid x \in X \quad \text{for some } X \in S\}$$

**وتقاطع** (intersection) **عائلة اختيارية** S **من مجموعات:**

$$\cap S = \{x \mid x \in X \quad \forall\, X \in S\}$$

**وإذا كانت**

$$S=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\},$$

**فإننا نكتب**

$$\bigcup S=\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \bigcap S=\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

**أما إذا كانت**

$$S=\{A_1, A_2, \cdots\}$$

**فإننا نكتب**

$$\bigcup S=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \qquad \bigcap S=\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

**مثال ٢-١:**

**إذا كانت**

$$A_n=\{n, n+1, \cdots\}, \qquad S=\{A_1, A_2, \cdots\}$$

**فإن**

$$\bigcup S=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\{1, 2, \cdots\},$$

$$\bigcap S=\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i=\phi.$$

**تجزئة** (a partition) **مجموعة** X **تقسم** X **إلى مجموعات جزئية غير متداخلة / غير متشابكة** (nonoverlapping subsets).

**تعريف:**

**يُقال لمجموعة** S (collection) **من مجموعات جزئية (غير خالية) من مجموعة** X **إنها تجزئة (partition) للمجموعة** X **إذا كان أي عنصر من عناصر** X **ينتمي إلى عنصر واحد بالضبط من عناصر** S. **ولاحظ أنه إذا كانت** S **تجزئة لمجموعة** X **فإن** S **تكون متباعدة زوجا زوجا** (pairwise disjoint) ، **وكذلك** $US=X$.

فمثلا نظرا لأن كل عنصر من عناصر المجموعة $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ينتمي إلى عنصر واحد بالضبط من عناصر المجموعة

$$S = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}, \{3\}, \{7, 8\}\}$$

فإن S تعد تجزئة (a partition) للمجموعة X.

أشرنا سابقا إلى أن ترتيب العناصر في المجموعة غير مهم ، فالمجموعة تتحدد بعناصرها ، وليس بأي ترتيب معين تُكتب به قائمة (list) هذه العناصر. ولكن أحيانا يهمنا أن نأخذ هذا الترتيب في الاعتبار.

**الزوج المرتب (ordered pair)** من العناصر ، والمكتوب في الصيغة (a, b) يعتبر مختلفا عن الزوج المرتب (b, a) إلا إذا كانت بالطبع $a = b$. أي أن

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow [a = c \ \text{ and } \ b = d]$$

**الضرب الكارتيزي / الديكارتي $X \times Y$ (Cartesian product)**

إذا كانت $X, \ Y$ مجموعتين فإن $X \times Y$ تعني مجموعة جميع الأزواج المرتبة $(x, y)$ حيث $x \in X, \quad y \in Y$.

**مثال ٢-٢:**

نفرض أن $X = \{1, 2, 3\}, \quad Y = \{a, b\}$

(i) اكتب عناصر المجموعات $X\times Y, Y\times X, X\times X, Y\times Y$

(ii) تحقق من صحة العلاقتين العامتين

$$X \times Y \neq Y \times X$$
$$|X \times Y| = |X| . |Y|$$

**الحل:** (i)

$X \times Y=\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

$Y \times X=\{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$

$X \times X=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$Y \times Y=\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

(ii) واضح أن عناصر المجموعة $X \times Y$ تختلف تماما عن عناصر المجموعة $Y \times X$ وبالتالي فالمجموعتان مختلفتان.

$|X \times Y| = 6$

$|X| . |Y| = 3. 2 = 6 = |X \times Y|$

**مثال ٢-٣:**

عند الالتحاق بالجامعة يمكن لطالب معين أن يختار الالتحاق بإحدى الجامعات التالية:

c = Cairo Univ., k = Kuwait Univ.,
b = Baghdad Univ., d = Damascus Univ.

وكذلك يمكنه اختيار الالتحاق بإحدى الكليات التالية:

s = Science, e = Engineering,
m = Medicine

فإذا فرضنا أن

$U = \{c, k, b, d\}$,
$F = \{s, e, m\}$

فإن الضرب الديكارتي $U \times F$ يعطينا قائمة الاختيارات الاثني عشرة المتاحة أمام الطالب لاختيار جامعة معينة وكلية معينة.

ولا يشترط في القوائم المرتبة (ordered lists) أن تقتصر على عنصرين فقط. والعَدِيد النوني (n-tuple) والذي يُكتب في الصيغة $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ يأخذ الترتيب في الاعتبار. ولذلك فإن:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \Leftrightarrow [a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_n = b_n]$$

والضرب الديكارتي للمجموعات $X_1, X_2, \cdots, X_n$ يعرَّف بأنه مجموعة جميع العديدين النونيين $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ (n-tuples) حيث $x_i \in X_i;\ i = 1,2,..,n$. ونرمز لهذا الضرب بالاصطلاح $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

**مثال ٢-٤:**

نفرض أن $X = \{1, 2\}, \quad Y = \{a, b\}, \quad Z = \{\alpha, \beta\}$.

اكتب عناصر مجموعة الضرب الديكارتي $X \times Y \times Z$.

**الحل:**

$$X \times Y \times Z = \{(1,a,\alpha),\ (1,a,\beta),\ (1,b,\alpha),\ (1,b,\beta),\ (2,a,\alpha),\ (2,a,\beta),\ (2,b,\alpha),\ (2,b,\beta)\}$$

**لاحظ أيضا في هذا المثال أن**

$$|X \times Y \times Z| = 8 = |X| \,.\, |Y| \,.\, |Z|$$

**وعموما تتحقق دائما العلاقة**

$$|X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n| = |X_1| \,.\, |X_2| \cdots |X_n|$$

**ويمكن إثبات صحة هذه العلاقة / العبارة / المتطابقة الأخيرة بالاستقراء بالنسبة لعدد المجموعات n.**

**مثال ٢-٥:**

**إذا كانت U هي مجموعة الجامعات ، وF هي مجموعة الكليات ، وD هي مجموعة الأقسام ، فإن الضرب الديكاتي U × F × D يعطي قائمة جميع الاختيارات الممكنة أمام الطالب للالتحاق بجامعة معينة وكلية معينة وقسم معين.**

## ثانيا: المتتاليات / المتتابعات والسلاسل
## Sequences and Strings

**المتتالية s (sequence) هي قائمة (list) عناصر نأخذ ترتيبها (order) في الاعتبار. وعادة نرمز إلى العنصر الأول من المتتالية بالرمز $s_1$ ، والثاني $s_2$ ، ... وهكذا. وعموما $s_n$ يرمز إلى العنصر النوني (nth element) في المتتالية. ويطلق على n دليل / مؤشر (index) المتتالية.**

**مثال ٢-٦:**

(i) **القائمة المرتبة** (ordered list)

2, 4, 6, ..., 2n, ...

**تعد متتالية s (أي نرمز لها بالرمز s) عناصرها**

$$s_1 = 2,\ s_2 = 4,\ s_3 = 6, \cdots,\ s_n = 2n, \cdots$$

(ii) **القائمة المرتبة**

a, a, b, a, b

**تعد متتالية** t **عناصرها**

$$t_1 = a,\ t_2 = a,\ t_3 = b,\ t_4 = a,\ t_5 = b$$

**من هذا المثال يتبين لنا أن المتتالية – بخلاف المجموعة** (set) **– يمكن أن تحتوي على عناصر مكررة** (repetitions)**. كذلك يتبين لنا أن المتتالية يمكن أن تحتوي على عدد لا نهائي من العناصر [كالمتتالية** (i)**] أو عدد محدود من العناصر [كالمتتالية** (ii)**].**

**وهناك اصطلاح آخر يستخدم للرمز إلى المتتالية** s **وهو** $\{s_n\}$. **ونلاحظ أن** s **أو** $\{s_n\}$ **يعني المتتالية بأكملها ، بينما** $s_n$ **يعني العنصر النوني (الذي ترتيبه** n**) الوحيد** (single nth element) **في المتتالية** s.

**مثال ٢-٧:**

**نفرض أننا أُعطينا تعريف المتتالية** $\{t_n\}$ **بالقاعدة:**

$$t_n = n^2 - 1, \qquad n \geq 1$$

**الحدود** (terms) **الخمسة الأولى من هذه المتتالية هي:**

0, 3, 8, 15, 24

**والحد العشرون هو:**

$$t_{20} = 20^2 - 1 = 399$$

**مثال ٢-٨:**

**نفرض أننا سنعرِّف المتتالية** u **بالقاعدة التالية:**

$u_n$ **: هو الحرف الذي ترتيبه** n **في الكلمة** digital**. وبالتالي فإن**

$$u_1 = d,\ u_2 = u_4 = i,\ u_3 = g,\ u_5 = t,\ u_6 = a,\ u_7 = \ell$$

**وهذه متتالية محدودة / منتهية** (finite sequence)**.**

**ملاحظة:**

**عادة نشير إلى العنصر الأول في متتالية** s **بالرمز** $s_1$. **ولكن عموما مؤشر** (index) **العنصر الأول يمكن أن يكون أي عدد صحيح مثل** 0 **، وبالتالي تكون عناصر المتتالية هي:** $s_0, s_1, s_2, \cdots$.

وإذا أردنـا أن نـذكر صراحة المؤشـر الابتـدائي (initial index) لمتتاليـة لا نهائية s ، فإننا نكتب $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، والمتتالية اللانهائيـة v الـتي مؤشـرها الابتـدائي 0 يرمز لها هكذا: $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ ، والمتتالية المحدودة x التي تتراوح قيم مؤشـرها مـن 1- إلى 4 يرمز لها هكذا: $\{x_n\}_{n=-1}^{4}$.

**مثال ٢-٩:**

إذا كانت x متتالية معرَّفة كما يلي:

$$x_n = \frac{1}{2^n}, \qquad -1 \le n \le 4$$

فإن عناصر x هي:

$$2, \quad 1, \quad 1/2, \quad 1/4, \quad 1/8, \quad 1/16$$

ومن المتتاليات الهامة تلك التي يطلق عليها المتتاليات المتزايـدة والمتتاليـة المتناقصة:

**تعريف:**

يقـال إن المتتاليـة s **متزايـدة (increasing)** [ والـبعض يطلـق عليهـا غـير متناقصة (nondecreasing) ] إذا كان

$$s_n \le s_{n+1} \qquad \forall n$$

وبالمثل يقال إن المتتالية s **متناقصة (decreasing)** [ والبعض يطلق عليها غير متزايدة (nonincreasing) ] إذا كان

$$s_n \ge s_{n+1} \qquad \forall n$$

**مثال ٢-١٠:**

i) المتتالية ... ,2, 4, 6 (في مثال ٢-٦-i) متزايدة لأن

$$s_n = 2n \le 2(n+1) = s_{n+1} \qquad \forall n$$

ii) المتتالية $2,\ 1,\ 1/2,\ 1/4,\ 1/8,\ 1/16$ (في مثال ٢-٩) متناقصة لأن

$$x_n = \frac{1}{2^n} \ge \frac{1}{2^{n+1}} = x_{n+1} \qquad \forall n$$

iii) المتتالية s التالية

$$3, 5, 5, 7, 8, 8, 13$$

**متزايدة لأن**

$$s_n \le s_{n+1} \qquad \forall n$$

**المتتالية الجزئية:**

**من طرق تكوين متتالية جديدة من متتالية معطاة ، الاحتفاظ ببعض الحدود فقط من المتتالية المعطاة ، مع المحافظة على ترتيب الحدود في المتتالية المعطاة. المتتالية الناتجة يطلق عليها متتالية جزئية (subsequence) من المتتالية الأصلية.**

**تعريف:**

**نفرض أن** $\{s_n\}$ **متتالية معرفة للقيم** $n = m, m+1, \cdots$

**ونفرض أن** $n_1, n_2, \cdots$ **متتالية متزايدة تحقق العلاقة**

$$n_k \le n_{k+1} \qquad \forall k$$

**وقيمها موجودة في المجموعة** $\{m, m+1, \cdots\}$. **نطلق على المتتالية** $\{s_{n_k}\}$ **متتالية جزئية من** $\{s_n\}$.

**مثال ٢-١١:**

**المتتالية** b, c **متتالية جزئية من المتتالية**

$$t_1 = a, \quad t_2 = a, \quad t_3 = b, \quad t_4 = c, \quad t_5 = q$$

**حيث نختار منها الحدين الثالث والرابع ، أي أنه في التعريف السابق:** $n_1 = 3, \; n_2 = 4$. **أي أن المتتالية الجزئية** b, c **هي:** $t_3, t_4$ **أو** $t_{n_1}, t_{n_2}$.

**ولاحظ أن المتتالية** c, b **ليست متتالية جزئية من المتتالية المعطاة:** a, a, b, c, q **لأننا لم نحافظ على ترتيب الحدود في هذه المتتالية.**

**مثال ٢-١٢:**

**المتتالية** $2, 4, 8, 16, ..., 2^k, ... \quad (*)$ **تعد متتالية جزئية من المتتالية**

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ..., 2n, ... \quad (**)$$

**حيث نختار من هذه المتتالية الأخيرة الحدود: الأول والثاني والرابع والثامن ...الخ. أي أن قيمة** $n_k$ **في التعريف السابق للمتتالية الجزئية هي** $n_k = 2^{k-1}$.

**فإذا عرَّفنا المتتالية المعطاة (**) بالعلاقة** $s_n = 2n$ **فإن المتتالية الجزئية (*) تعرَّف بالعلاقة**

$$s_{n_k} = s_{2^{k-1}} = 2.2^{k-1} = 2^k$$

**هناك طريقتان هامتان من طرق إنشاء متتاليات جديدة من متتاليات عددية** (numerical sequences) **معطاة ، وذلك عن طريق جمع** (adding) **بعض الحدود – في المتتالية المعطاة – أو ضربها** (multiplying) **لنحصل على حدود في المتتالية الجديدة.**

**تعريف اصطلاحَي الجمع والضرب:**

**نفرض أن لدينا المتتالية** $\{a_i\}_{i=m}^{n}$

**نعرِّف:**

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n,$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \,.\, a_{m+1} \,.\, \cdots \,.\, a_n$$

**يطلق على** $\sum_{i=m}^{n} a_i$ **اصطلاح الجمع ، وعلى** $\prod_{i=m}^{n} a_i$ **اصطلاح الضرب.**

$i$ **يطلق عليه: المؤشر** (index) **، و** $m$ **: الحد السفلي** (lower limit) **،** $n$**: الحد العلوي** (upper limit).

**مثال ٢-١٣:**

**نفرض أن** $a$ **متتالية معرفة بالعلاقة**

$$a_n = 2n, \qquad n \geq 1$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 4 + 6 = 12,$$

$$\prod_{i=1}^{3} a_i = a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 = 2 \,.\, 4 \,.\, 6 = 48$$

**مثال ٢-١٤:**

**المجموع الهندسي** (geometric sum)

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n$$

يمكن إعادة كتابته بصورة مختصرة / متراصة (compact) باستخدام اصطلاح الجمع:

$$\sum_{i=0}^{n} a\, r^{i}$$

**ملاحظة:**

اسم المؤشر في اصطلاح الجمع لا أهمية له ، فمثلا

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j \qquad , \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{x=1}^{n} a_x$$

وأحيانا يكون من المفيد تغير اسم المؤشر وكذلك حدوده.

**مثال ٢-١٥:**

أعد كتابة المجموع

$$\sum_{i=0}^{n} i\, r^{n-i}$$

باستبدال الرمز j بالرمز i ، حيث $i = j-1$.

**الحل:**

$j = i+1$. ولذلك عندما $i = 0$ فإن $j = 1$ ، وعندما $i = n$ فإن $j = n+1$. وبالتعويض عن i بدلالة j فإن المجموع المعطَى يصبح:

$$\sum_{j=1}^{n+1} (j-1) r^{n-j+1}$$

**مثال ٢-١٦:**

نفرض أن a هي المتتالية المعرَّفة بالقاعدة

$$a_n = 2(-1)^n, \quad n \ge 0$$

أوجد صيغة (formula) للمتتالية s المعرفة بالقاعدة

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

**الحل:**

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$= 2(-1)^0 + 2(-1)^1 + 2(-1)^2 + \cdots + 2(-1)^n$$
$$= 2 - 2 + 2 - \cdots \pm 2 = \begin{cases} 2\cdots\cdots & \text{إذا كان } n \text{ عددا زوجيا} \\ 0\cdots\cdots & \text{إذا كان } n \text{ عددا فرديا} \end{cases}$$

**وأحيانا نعدِّل اصطلاحي الجمع والضرب ليرمزا إلى الجمع والضرب حيث يتغير المؤشر (index) ليأخذ قيما من مجموعات اختيارية من الأعداد الصحيحة.**

**فإذا فرضنا أن a متتالية ، وأن S مجموعة من الأعداد الصحيحة ، فإن**

$$\sum_{i \in S} a_i$$

**تعني مجموع العناصر** $\{a_i \mid i \in S\}$. **وبالمثل فإن**

$$\prod_{i \in S} a_i$$

**تعني حاصل ضرب العناصر** $\{a_i \mid i \in S\}$.

**مثال ٢-١٧:**

**نفرض أن S تعني مجموعة الأعداد الأولية الأقل من** 20.

$$\sum_{i \in S} \frac{1}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} = 1.455$$

**أحيانا يطلق على المتتالية المحدودة " سلسلة "** (string).

**تعريفات:**

- **السلسلة المعرفة على مجموعة X** (a string over X) **هي متتالية محدودة** (finite sequence) **من عناصر من** X.

**مثال ٢-١٨:**

**نفرض أن** $X = \{a, b, c\}$. **فإذا فرضنا أن**

$$\beta_1 = b, \quad \beta_2 = a, \quad \beta_3 = a, \quad \beta_4 = c$$

**فإننا نحصل على سلسلة** $\beta$ **معرفة على المجموعة** X **، وتُكتب هذه السلسلة:** baac.

**ونظراً لأن السلسلة عبارة عن متتالية فإن الترتيب يُؤخذ في الاعتبار. فالسلسلة** baac **مـثلا تعـد مختلفـة عـن السلسـلة** acab**. ويمكـن تحديـد عـدد مـرات تكـرار** (repetitions) **رمـز مـا في السلسـلة بمؤشـر علـوي** (superscript)**. فمـثلا السلسـلة** bbaaac **يمكن كتابتها هكذا:** $b^2a^3c$ .

- **السلسلة التي لا تحتوي على أي عنصر يطلق عليها السلسلة الخالية / الخاوية / الصفرية (null string)** ، **ويرمز لها بالرمز** $\lambda$ .
- **سنستخدم الرمز** $X^*$ **ليعني مجموعة جميع السلاسل المعرفة على** (set of all strings over) **X** ، **والرمز** $X^+$ **ليعني مجموعة جميع السلاسل غير الخاوية المعرفة على X** (set of all nonnull strings over)**.**

**فمثلا إذا كانت** $X = \{a, b\}$ ، **فمن عناصر المجموعة** $X^*$:

$$\lambda, \quad a, \quad b, \quad abab, \quad b^{20}a^5ba$$

- **يعرَّف طـول أي سلسلة** $\alpha$ (length of a string) – **ونرمز لـه بـالرمز** $|\alpha|$ – **بأنه عدد العناصر في** $\alpha$

**فمثلا إذا كانت** $\alpha = aabab, \quad \beta = a^3b^4a^{32}$

**فإن** $|\alpha| = 5, \quad |\beta| = 39$

- **إذا كانت** $\alpha, \beta$ **سلسلتين فإن السلسلة المكونة مـن** $\alpha$ **تعقبهـا** $\beta$ ، **وتكتـب** $\alpha\beta$ ، **يطلق عليها تعاقب** $\alpha, \beta$ **(concatenation of).**

**مثلا إذا كانت** $\gamma = aab, \quad \theta = cabd$

**فإن**

$$\gamma\theta = aabcabd$$
$$\theta\gamma = cabdaab$$
$$\gamma\lambda = \gamma = aab$$
$$\lambda\gamma = \gamma = aab$$

## ثالثا: العلاقات
## (Relations)

**يمكننا النظر إلى العلاقة** (relation) **على أنها جدول** (table) **يعطي قائمة** (list) **توضح العلاقة** (relationship) **بين مجموعة من العناصر** (elements) **ومجموعة أخرى من العناصر. فمثلا الجدول التالي يوضح العلاقة بين الطلاب والمقررات (أيّ طلاب يدرسون أيّ مقررات)**

| اسم الطالب student | اسم المقرر course |
|---|---|
| Bilal | CompSci |
| Ammar | Math |
| Bilal | Art |
| Sohayb | History |
| Sohayb | CompSci |
| Salman | Math |

**جدول (٣)**

**العلاقة بين الطلاب والمقررات**

Relation of Students to Courses

**فمثلا عمار يدرس مقرر الرياضيات بينما صهيب يدرس مقرري التاريخ وعلم الحاسوب. وباصطلاح العلاقات** (terminology of relations) **نقول إن عمار مرتبط بعلاقة مع الرياضيات** (Ammar is related to Mathematics) ، **بينما صهيب مرتبط بعلاقة مع كل من التاريخ وعلم الحاسوب** (Sohayb is related to History and Computer Science).

**نلاحظ أن هذا الجدول عبارة عن مجموعة من الأزواج المرتبة** (ordered pairs). **ومن الناحية المجردة** (abstractly) **فإننا نُعرِّف العلاقة على أنها مجموعة من الأزواج المرتبة** (x, y) **حيث نعتبر أن العنصر الأول** x **في الزوج المرتب مرتبط بعلاقة مع العنصر الثاني** y (x is related to y).

**تعريف:**

**العلاقة (الثنائية)** R [(binary) relation] **من مجموعة** X **إلى مجموعة** Y **هي مجموعة جزئية** (subset) **من الضرب الديكارتي** $X \times Y$. **وإذا كان** $(x, y) \in R$ ، **فإننا نكتب** xRy **ونقول إن** x **مرتبطة بـ (علاقة مع)** (x is related to y) y. **وفي حالة ما إذا كان** $X = Y$ **فإننا نُسمِّي** R: **" علاقة (ثنائية) على X " [(binary) relation on X].**

**ويطلق على المجموعة**

$$\{x \in X \mid (x, y) \in R \text{ for some } y \in Y\}$$

**مجال R (domain of). بينما يطلق على المجموعة**

$$\{y \in Y \mid (x, y) \in R \text{ for some } x \in X\}$$

**مدى R (range of).**

**وعندما تعطَى العلاقة** (relation) **بصورة جدول فإن المجال يتكون من عناصر العمود الأيسر (مثل عمود الطلاب في الجدول السابق) ، بينما المدى يتكون من عناصر العمود الأيمن (مثل عمود المقررات في هذا الجدول).**

**مثال ٢-١٨:**

**نفرض أن**

X = {Bilal, Ammar, Sohayb, Salman} ,
Y = {CompSci, Math, Art, History}

**العلاقة** R **المعطاة بالجدول السابق (جدول (٣)) يمكن أن تكتب بالصورة التالية:**

R = {(Bilal, CompSci), (Ammar, Math), (Bilal, Art),
(Sohayb, History), (Sohayb, CompSci), (Salman, Math)}.

**ونظرا لأن** (Sohayb, CompSci) $\in R$ **فيمكننا أن نكتب** Sohayb R CompSci. **ومجال العلاقة** R **(العمود الأيسر) هو المجموعة** X ، **ومداها (العمود الأيمن) هو المجموعة** Y.

هذا المثال (مثال ٢–١٨) يبين أن العلاقة يمكن أن تعطى ببساطة بتحديد الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى العلاقة. والمثال التالي يبين أنه يمكن أحيانا تعريف العلاقة بإعطاء قاعدة العضوية (rule for membership) في العلاقة.

**مثال ٢–١٩:**

نفرض أن

$$X = \{2, 3, 4\}, \qquad Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

ونفرض أن العلاقة R من X إلى Y تعرَّف كما يلي:

$(x, y) \in R$ : إذا كانت x تَقْسِم y [أي أن y تقبل القسمة على x بدون باق. أي أن x divides y (with zero remainder)].

$$R = \{(2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4)\}.$$

ويمكننا كتابة R في صورة جدول كما يلي:

| X | Y |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 2 | 6 |
| 3 | 3 |
| 3 | 6 |
| 4 | 4 |

مجال R هو المجموعة {2, 3, 4} ، ومدى R هو المجموعة {3, 4, 6}.

**مثال ٢–٢٠:**

نفرض أن R علاقة على X = {1, 2, 3, 4} معرفة كما يلي:

$$(x, y) \in R \quad \text{if} \quad x \le y, \quad x, y \in X.$$

يمكننا كتابة المجموعة R بذكر عناصرها ، هكذا:

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

مجال R ومداها كلاهما يساوي X.

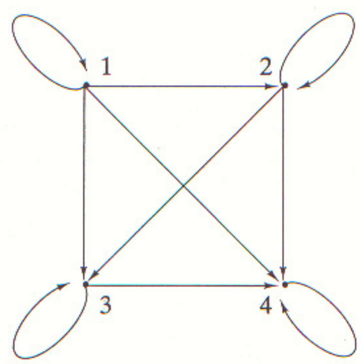
ومن الطرق التوضيحية لتصوير العلاقات على المجموعات رسم ثنائيّ البيان (digraph) الخاص بالعلاقة. ولرسم ثنائي بيان علاقة ما على مجموعة X نرسم أولا نقاطا أو رؤوسا (vertices) تمثل عناصر المجموعة X. وإذا كان (x, y) عنصرا في العلاقة فإننا نرسم سهما (arrow) [ويطلق عليه "حرفا موجها" (a directed edge)]

من x إلى y. وحينما يكون (x, x) عنصرا في العلاقة فإننا نرسم حرفا موجها من x إلى x. ومثل هذا الحرف يطلق عليه "عروة" (loop).

**مثال ٢-٢١:**

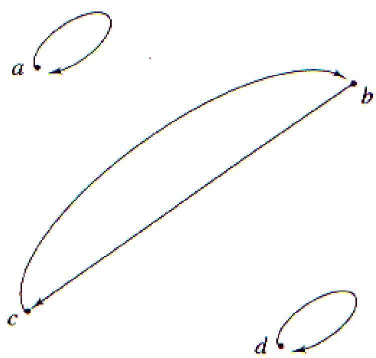
ارسم ثنائي البيان (digraph) للعلاقة R المعرفة في المثال السابق (مثال ٢-٢٠)

**الحل:**




**مثال ٢-٢٢:**

ما هي العلاقة R على المجموعة X = {a, b, c, d} التي يمثلها ثنائي البيان التالي:




**الحل:**

$R = \{(a, a), (b, c), (c, b), (d, d)\}$

**خواص بعض العلاقات**

**Properties of some relations**

فيما يلي نعرِّف مجموعة من الخواص التي تحققها بعض العلاقات.

- **يقال إن العلاقة R على مجموعة X علاقة انعكاسية (reflexive) إذا كان**

$$(x, x) \in R \qquad \forall x \in X$$

**فمثلا العلاقة R المعرفة في مثال ٢–٢٠ على المجموعة $X = \{1, 2, 3, 4\}$ انعكاسية لأن كلا من (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) ينتمي إلى R. ويلاحظ أن ثنائي بيان أي علاقة انعكاسية يجب أن يحتوي على عروة عند كل رأس ، وهذا ما يحققه ثنائي بيان العلاقة R المعرفة في مثال ٢–٢٠ والمرسوم في مثال ٢–٢١.**

**بينما العلاقة R المعرفة في مثال ٢–٢٢ على المجموعة $X = \{a, b, c, d\}$ ليست انعكاسية لأن b مثلا عنصر في X أي أن $b \in X$ ولكن $(b,b) \notin R$. ويمكن أيضا معرفة أن هذه العلاقة ليست انعكاسية بمجرد رؤية ثنائي بيانها (المعطى في مثال ٢–٢٢) حيث لا توجد عروة عند الرأس b.**

- **يقال إن العلاقة R على مجموعة X علاقة متماثلة / متناظرة (symmetric) إذا تحقق الشرط:**

$$[(x,y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y,x) \in R] \quad \forall x, y \in X$$

**فمثلا علاقة مثال ٢–٢٢ متناظرة. لاحظ مثلا أن $(b,c) \in R$ وكذلك أيضا $(c,b) \in R$. ويلاحظ في ثنائي بيان أي علاقة متناظرة أنه إذا كان هناك حرف موجه من v إلى w فيجب أن يكون هناك أيضا حرف موجه من w إلى v ، وهذه الخاصية متحققة في ثنائي بيان علاقة مثال ٢–٢٢. بينما علاقة مثال ٢–٢٠ غير متناظرة. فمثلا $(2,3) \in R$ ولكن $(3,2) \notin R$. ونلاحظ أن ثنائي بيان هذه العلاقة (والمرسوم في مثال ٢–٢١) يحتوي على حرف موجه من 2 إلى 3 ، ولكن لا يوجد حرف موجه من 3 إلى 2.**

- **يقال إن العلاقة R على مجموعة X علاقة قطرية التناظر (antisymmetric) إذا تحقق الشرط**

$$[((x,y) \in R \quad \& \quad x \neq y) \quad \Rightarrow \quad (y,x) \notin R] \quad \forall x, y \in X$$

**فمثلا علاقة مثال ٢–٢٠ قطرية التناظر. لاحظ مثلا أن $(1,2) \in R$ ولكن $(2,1) \notin R$. والخاصية المميزة لثنائي بيان أي علاقة قطرية التناظر هي أنه**

بين أي رأسين يوجد على الأكثر حرف موجه واحد. وهذه الخاصية متحققة في ثنائي بيان علاقة مثال ٢-٢٠ والمرسوم في مثال ٢-٢١. بينما علاقة مثال ٢-٢٢ ليست قطرية التناظر لأن كلا من (b, c), (c, b) ينتمي إلى R. وفي ثنائي بيان هذه العلاقة يوجد حرفان موجهان بين الرأسين b, c.

ويلاحظ أنه إذا لم توجد عناصر في الصورة (x, y) حيث $x \neq y$ في علاقة ما R على مجموعة X ، فإن هذه العلاقة R قطرية التناظر ، وذلك لأنه في هذه الحالة إذا كان x, y أي عنصرين في X ، فإن الافتراض

$$\text{if}\,(x,y) \in R \quad \text{and} \quad x \neq y\,, \quad \text{then} \quad (y,x) \notin R$$

يكون صحيحا (true) لأن الفرض (hypothesis) خاطئ (false).

**مثال ٢-٢٣:**

العلاقة

R = {(a, a), (b, b), (c, c)}

على المجموعة X = {a, b, c} علاقة قطرية التناظر.

ونلاحظ أن ثنائي بيان هذه العلاقة والمبين فيما يلي


يحتوي على الأكثر على حرف موجه واحد بين أي رأسين. ولاحظ أيضا أن هذه العلاقة R انعكاسية ومتناظرة. وهذا المثال يوضح أن الخاصية "قطرية التناظر" (antisymmetric) ليست هي نفسها الخاصية "ليست متناظرة" (not symmetric).

- يقال إن العلاقة R على مجموعة X علاقة متعدية (**transitive**) إذا تحقق الشرط

$$[((x,y) \in R \quad \& \quad (y,z) \in R) \quad \Rightarrow \quad (x,z) \in R] \quad \forall x,y,z \in X$$

**مثال ٢-٢٤:**

**علاقة مثال ٢-٢٠ علاقة متعدية ، لأنه لأي زوجين في الصيغة** (x, y), (y, z) **في العلاقة** R **فإن الزوج** (x, z) **يكون أيضا في** R **، كما يتضح من الجدول التالي الذي يشمل كافة هذه الأزواج.**

| زوجان في الصيغة | | | زوجان في الصيغة | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (x, y), | (y, z) | (x, z) | (x, y), | (y, z) | (x, z) |
| (1,1) | (1,1) | (1,1) | (2,2) | (2,2) | (2,2) |
| (1,1) | (1,2) | (1,2) | (2,2) | (2,3) | (2,3) |
| (1,1) | (1,3) | (1,3) | (2,2) | (2,4) | (2,4) |
| (1,1) | (1,4) | (1,4) | (2,3) | (3,3) | (2,3) |
| (1,2) | (2,2) | (1,2) | (2,3) | (3,4) | (2,4) |
| (1,2) | (2,3) | (1,3) | (2,4) | (4,4) | (2,4) |
| (1,2) | (2,4) | (1,4) | (3,3) | (3,3) | (3,3) |
| (1,3) | (3,3) | (1,3) | (3,3) | (3,4) | (3,4) |
| (1,3) | (3,4) | (1,4) | (3,4) | (4,4) | (3,4) |
| (1,4) | (4,4) | (1,4) | (4,4) | (4,4) | (4,4) |

**ويلاحظ أنه عند التحقق من شرط العلاقة المتعدية – المعطى في تعريفها – لا داعي لاختبار تحقق الشرط في الحالات التي يكون فيها** x = y **أو** y = z **، وذلك لأنه في هذه الحالات سيتحقق الشرط تلقائيا** (is automatically true)**. مثلا إذا كانت** x = y **، وكان** $(x,y)\in R, \quad (y,z)\in R$ **فإن:**

$$(x,z)=(y,z)\in R$$

**أي أن الشرط متحقق.**

**وبحذف هذه الحالات التي يكون فيها** $x = y$ **أو** $y = z$ **(من الجدول السابق) ، تتبقى لنا الحالات التالية التي نختبر فيها شرط العلاقة المتعدية:**

| (x, y), | (y, z) | (x, z) |
|---|---|---|
| (1,2) | (2,3) | (1,3) |
| (1,2) | (2,4) | (1,4) |
| (1,3) | (3,4) | (1,4) |
| (2,3) | (3,4) | (2,4) |

وثنائي بيان العلاقة المتعدية يحقق الخاصية أنه إذا وجد حرف موجَّه من x إلى y وآخر من y إلى z فيجب أن يوجد أيضا حرف موجه من x إلى z. وهذه الخاصية متحققة في ثنائي بيان علاقة مثال ٢-٢٠ والمرسوم في مثال ٢-٢١.

ونلاحظ أن علاقة مثال ٢-٢٢ ليست علاقة متعدية. مثلا $(b,c) \in R, (c,b) \in R$ ولكن $(b,b) \notin R$. وفي ثنائي بيان هذه العلاقة نلاحظ وجود حرف موجه من b إلى c ، وآخر من c إلى b ، ولكن لا يوجد حرف موجه من b إلى b.

ويمكن استخدام العلاقات لترتيب (ordering) عناصر مجموعة. فمثلا العلاقة R المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة (set of integers) كما يلي:

$$(x, y) \in R, \quad \text{if} \quad x \leq y$$

ترتِّب الأعداد الصحيحة.

- يقال إن العلاقة R على مجموعة X **ترتيب جزئي (partial order)** إذا كانت R انعكاسية ، وقطرية التناظر ، ومتعدية.

**مثال ٢-٢٥:**

العلاقة R المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة كما يلي:

$$(x, y) \in R, \quad \text{if} \quad x \text{ divides } y \text{ (evenly)}$$

[أي أن الزوج (x, y) ينتمي إلى R إذا كانت x تَقْسِم y (أي أن y تقبل القسمة على x (بدون باق)].

علاقة انعكاسية ، وقطرية التناظر ، ومتعدية ، وبالتالي R ترتيب جزئي.

وإذا كانت R ترتيبا جزئيا على مجموعة X ، فإن الاصطلاح $x \preceq y$ يستخدم أحيانا للدلالة على أن $(x, y) \in R$. وهذا الاصطلاح يشير إلى أننا نفسِّر العلاقة على أنها ترتيب (ordering) للعناصر في X.

نفرض أن R ترتيب جزئي على مجموعة X. إذا كان $x, y \in X$ وإما $x \preceq y$ أو $y \preceq x$ فإننا نقول إن x, y **قابلان للمقارنة (comparable)**. وإذا كان $x, y \in X$ و $x \npreceq y$ و $y \npreceq x$ فإننا نقول إن x, y **غير قابلين للمقارنة (incomparable)**. وإذا كان كل زوج من العناصر (pair of elements) في X

قابلا للمقارنة (comparable) فإننا نسمِّي R **ترتيبا كليّاً (total order)**. فمثلا علاقة " أقل من أو يساوي" ["is less than or equals " relation] على الأعداد الصحيحة الموجبة تعد ترتيبا كليا ، لأنه إذا كان x, y عددين صحيحين فإما أن يكون $x \le y$ أو $y \le x$ . وأما السبب في تسمية الاصطلاح " ترتيب جزئي " (partial order) فيرجع إلى أنه عموما قد تكون بعض العناصر في X غير قابلة للمقارنة (incomparable). فمثلا علاقة " تَقْسِم" ["divides" relation] على الأعداد الصحيحة الموجبة لها عناصر قابلة للمقارنة وأخرى غير قابلة للمقارنة. فالعددان 3 ,2 مثلا غير قابلين للمقارنة (لأن 2 لا تَقْسِم 3 ، وكذلك 3 لا تقسم 2) ، بينما العددان 6 ,3 مثلا قابلان للمقارنة (لأن 3 تَقْسِم 6).

من تطبيقات الترتيبات الجزئية (partial orders) مسألة جدولة المهمات (task scheduling).

**مثال ٢-٢٦:**

نفرض أن T هي مجموعة المهمات (tasks) التالية اللازم إتمامها من أجل أخذ صورة فوتوغرافية داخل مبنى بإرسال وميض خاطف (to take an indoor flash picture):

١- أزل غطاء العدسة (remove lens cap).

٢- ركِّز آلة التصوير (focus camera).

٣- عطِّل قفل الأمان (turn off safety lock).

٤- شغِّل وحدة الإضاءة الخاطفة (turn on flash unit).

٥- اضغط على زر أخذ الصورة (push photo button).

بعض هذه المهمات يجب إنجازها قبل البعض الآخر. مثلا: المهمة ١ يجب إتمامها قبل المهمة ٢. ومن ناحية أخرى فبعض المهمات يمكن إتمامها بأي ترتيب. مثلا: المهمة ٢ والمهمة ٣ يمكن إنجازهما بأي ترتيب.

نعرِّف العلاقة $R'$ على المجموعة T كما يلي:

$iR'j$ iff task i must be done before task j

( أي أن $iR'j$ تعني أن المهمة i يجب إنجازها قبل المهمة j )

هذه العلاقة ترتب المهمات / الأعمال (orders the tasks). ورغم أن العلاقة $R'$ قطرية التناظر (antisymmetric) ومتعدية (transitive) ، إلا أنها ليست انعكاسية (reflexive). وبالتالي فإن $R'$ ليست ترتيبا جزئيا. ويمكننا الحصول على ترتيب جزئي بأن نضيف جميع الأزواج $(i, i)$ للقيم $i = 1, 2, ..., 5$. وهكذا فإن العلاقة

$$R' \cup \{(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$$

ترتيب جزئي (partial order) على المجموعة T. وحل مسألة جدولة المهمات بحيث يمكننا أخذ صورة هو ترتيب كلي (total ordering) للمهمات يتواءم مع (consistent with) الترتيب الجزئي (partial order). وبأسلوب أدق فإننا نحتاج إلى ترتيب كلي للمهمات

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$$

بحيث أنه إذا كان $t_i \, R' \, t_j$ فإن $t_i$ تسبق $t_j$ في القائمة (list).

* * *

إذا أُعطينا علاقة R من مجموعة X إلى مجموعة Y فيمكننا تعريف علاقة من Y إلى X بعكس (reversing) ترتيب (order) كل زوج مرتب في R ، كما يتضح من التعريف الرسمي التالي:

**تعريف:**

نفرض أن R علاقة من مجموعة X إلى مجموعة Y. معكوس العلاقة **R (inverse of)** – ونرمز لهذا المعكوس بالرمز $R^{-1}$ – هو العلاقة من Y إلى X المعرفة كما يلي:

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

**مثال ٢-٢٧:**

اكتب معكوس العلاقة R المعرفة في مثال ٢-١٩.

**الحل:**

من مثال ٢-١٩:

$$R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$$

$$\therefore R^{-1} = \{(4, 2), (6, 2), (3, 3), (6, 3), (4, 4)\}$$

ويمكننا وصف (describing) هذه العلاقة $R^{-1}$ بالكلمات هكذا:

" يقبل القسمة على " (is divisible by)

وهي معكوس العلاقة: " يَقْسِم " (divides).

*      *      *

وإذا كان لدينا علاقة $R_1$ من X إلى Y ، وعلاقة أخرى $R_2$ من Y إلى Z ، فإنه يمكننا تكوين (forming) علاقة من X إلى Z بتطبيق (applying) العلاقة الأولى $R_1$ ثم العلاقة الثانية $R_2$ . ونرمز للعلاقة الناتجة هكذا: $R_2 \circ R_1$ . ولاحظ الترتيب الذي تُكتب به العلاقتان. وفيما يلي تعريف عملية التركيب (composition) هذه:

**تعريف:**

نفرض أن $R_1$ علاقة من X إلى Y ، وأن $R_2$ علاقة من Y إلى Z. تركيب (composition) العلاقتين $R_1, R_2$ [أي $R_1$ و $R_2$ ، أي $R_1$ ثم $R_2$] – ونرمز لهذا التركيب بالاصطلاح $R_2 \circ R_1$ – هو العلاقة من X إلى Z المعرفة كما يلي:

$$R_2 \circ R_1 = \{(x, z)\}(x, y) \in R_1 \text{ and } (y, z) \in R_2 \text{ for some } y \in Y\}.$$

**مثال ٢-٢٨:**

تركيب (composition) العلاقتين

$$R_1 = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$$
$$R_2 = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$$

هو:

$$R_2 o R_1 = \{(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u)$$

## رابعا: علاقات التكافؤ
## (Equivalence Relations)

نفرض أن لدينا مجموعة X من ١٠ كرات ملونة ، حيث لون أي كرة إما أخضر أو أزرق أو أحمر. فإذا قسمنا الكرات إلى ثلاث مجموعات R, B, G تبعا لألوانها – الأخضر والأزرق والأحمر على الترتيب – فإن العائلة (the family) $\{R, B, G\}$ تُعد تجزئة للمجموعة X (partition of). [سبق أن عرَّفنا تجزئة مجموعة X بأنها تَجَمُّع S لمجموعات جزئية – غير خالية – من (nonempty subsets of) المجموعة X بحيث أن أي عنصر في X ينتمي إلى عنصر واحد بالضبط من عناصر S].

ويمكن استخدام التجزئة لتعريف علاقة. فإذا كان S تجزئة لمجموعة X فيمكننا تعريف علاقة R كما يلي:

x R y : تعـني أن x, y ينتميان معا للمجموعة نفسها T (أي أن $(x \in T, \quad y \in T)$ من المجموعات الجزئية في S أي أن $T \in S$).

فمثلا في مثال الكرات المذكور سابقا يمكن وصف العلاقة التي نحصل عليها بأنها: " لها اللون نفسه مثل" (is the same color as). النظرية التالية تبين أن مثل هذه العلاقة – التي نحصل عليها عن طريق تجزئة – تكون دائما انعكاسية ومتناظرة ومتعدية.

**نظرية ٢-٣:**

نفرض أن S تجزئة لمجموعة X. ونفرض أننا نعرِّف x R y بأنها تعني أن x, y ينتميان معا إلى المجموعة نفسها T (أي أن $x \in T, \quad y \in T$) من المجموعات الجزئية في S (أي أن $T \in S$). العلاقة R ستكون انعكاسية (reflexive) ومتناظرة (symmetric) ومتعدية (transitive).

**البرهان:**

(i) نفرض أن $x \in X$ . بتعريف التجزئة فإن x تنتمي إلى عنصر ما T من عناصر S. وهكذا فإن x R x ، أي أن R انعكاسية.

(ii) نفرض أن $x\ R\ y$ . أي أن $x,\ y$ ينتميان معا إلى مجموعة ما $T$ ، حيث $T \in S$ . ونظرا لأن $y, x$ ينتميان معا إلى المجموعة $T$ ، فلذلك $y\ R\ x$ ، أي أن $R$ علاقة متناظرة.

(iii) نفرض أن $x\ R\ y,\ y\ R\ z$. وبالتالي فإن $x, y$ ينتميان معا إلى مجموعة ما $T$ ، حيث $T \in S$ ، وكذلك $y,\ z$ ينتميان معا إلى مجموعة ما $Q$ ، حيث $Q \in S$ . ونظرا لأن $y$ تنتمي إلى عنصر واحد بالضبط من عناصر $S$ ، فيجب أن تكون $T = Q$. ولذلك فإن $x, z$ ينتميان معا إلى المجموعة $T$ ، وهكذا فإن $x\ R\ z$. أي أن $R$ متعدية.

**مثال ٢-٢٩:**

نفرض أن لدينا التجزئة

$$S = \{\{1, 3, 5\} . \{2, 6\} . \{4\}\}$$

للمجموعة $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. العلاقة $R$ على $X$ والتي تعطيها نظرية ٢-٣ تحتوي مثلا على الأزواج المرتبة $(1, 1), (1, 3), (1, 5)$ لأن $\{1, 3, 5\}$ عنصر في $S$ ، أي مجموعة جزئية من المجموعات الجزئية في $S$. وأما العلاقة $R$ الكاملة فهي:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (2, 2), (2, 6), (6, 2), (6, 6), (4, 4)\}$$

**تعريف:**

العلاقة الانعكاسية والمتناظرة والمتعدية على مجموعة $X$ يطلق عليها " علاقة تكافؤ على X" (**equivalence relation on X**).

إذا فرضنا أن $S, R$ هما المذكورتان في نظرية ٢-٣. فإذا كانت $T \in S$ فإنه يمكننا اعتبار عناصر $T$ عناصر متكافئة بمفهوم العلاقة R (equivalent in the sense of the relation R). ففي مثال الكرات السابق: "مكافئة لـ " تعني" لها اللون نفسه مثل " ["equivalent to" ≡ "is the same color as"]. وكل مجموعة في التجزئة تتكون من جميع الكرات ذوات لون معين.

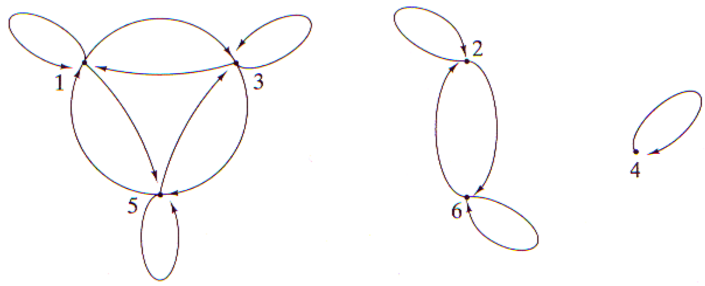
**مثال ٢-٣٠:**

العلاقة R في مثال ٢-٢٩ هي علاقة تكافؤ على المجموعة ,5 ,4 ,3 ,2 ,1} {6 ، وذلك بتطبيق نظرية ٢-٣. ويمكننا أيضا التحقق مباشرة من أن العلاقة R انعكاسية ومتناظرة ومتعدية.

**مثال ٢-٣١:**

ارسم ثنائي بيان (digraph) العلاقة R المذكورة في مثال ٢-٢٩ ، ومن الرسم تبين أن R انعكاسية ومتناظرة ومتعدية.

**الحل:**




من الشكل يتضح لنا أن العلاقة R انعكاسية (حيث توجد عروة عند كل رأس) ، ومتناظرة (لكل حرف موجَّه من v إلى w يوجد أيضا حرف موجه من w إلى v) ، وكذلك متعدية (إذا كان هناك حرف موجه من x إلى y ، وآخر من y إلى z ، فهناك أيضا حرف موجه من x إلى z).

**مثال ٢-٣٢:**

اثبت أن العلاقة

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

على {1, 2, 3, 4, 5} ، هي علاقة تكافؤ على {1, 2, 3, 4, 5}.

**الحل:**

(i) R انعكاسية لأن

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) \in R$$

(ii) R متناظرة لأنه كلما كان (x, y) في R فإن (y, x) يكون أيضا في R.

(iii) R متعدية لأنه كلما كان (x, y), (y, z) في R فإن (x, z) يكون أيضا في R.

وبالتالي فإن R علاقة تكافؤ على $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

**مثال ٢-٣٣:**

أ) العلاقة R في مثال ٢-٢٠ ليست علاقة تكافؤ لأن R ليست متناظرة.

ب) العلاقة R في مثال ٢-٢٢ ليست علاقة تكافؤ لأن R ليست انعكاسية ، وليست متعدية.

ج) العلاقة R في مثال ٢-٢٣ علاقة تكافؤ لأن R انعكاسية ومتناظرة ومتعدية.

* * *

وإذا أُعطينا علاقة تكافؤ على مجموعة X فيمكننا تجزئة X (partition X) عن طريق تجميع عناصر X المرتبطة (بعلاقة فيما بينها) معا (grouping related members of X together). ويمكننا النظر إلى العناصر المرتبطة فيما بينها على أنها متكافئة (equivalent). والنظرية التالية توضح ذلك.

**نظرية ٢-٤:**

نفرض أن Rعلاقة تكافؤ على مجموعة X.

لكل عنصر $a \in X$ نفرض أن

$$[a] = \{x \in X \mid xRa\}$$

المجموعة

$$S = \{[a] \mid a \in X\}$$

ستكون تجزئة للمجموعة X.

**البرهان:**

يجب أن نثبت أن كل عنصر في X ينتمي إلى عنصر واحد بالضبط من عناصر المجموعة S.

نفرض أن $a \in X$ . نظرا لأن aRa ، لذلك فإن $a \in [a]$ . وبالتالي فإن كل عنصر في X ينتمي على الأقل لعنصر واحد من عناصر S. يبقى أن نثبت أن كل عنصر في X ينتمي إلى عنصر واحد بالضبط من عناصر S ، أي نثبت أن:

$$(x \in X \quad \& \quad x \in [a] \cap [b]) \quad \Rightarrow \quad [a] = [b] \quad (*)$$

**نثبت أولا أنه إذا كان** a R b **فإن** [a] = [b] . **نفرض أن** a R b. **ونفرض أن** $x \in [a]$ ، **وبالتالي فإن** x R a. **وحيث أن** a R b ، **و** R **متعدية ، فلذلك نحصل على** x R b. **أي أن** $x \in [b]$ ، **وبالتالي** $[a] \subseteq [b]$.

**وبالمثل يمكننا إثبات أن** $[b] \subseteq [a]$ **بخطوات مماثلة للخطوات السابقة مع تبديل دوري** a, b. **وهكذا نحصل على النتيجة المطلوبة** [a] = [b].

**الخطوة التالية تثبت الاقتضاء** (*):

**نفرض أن** $x \in X$ **وأن** $x \in [a] \cap [b]$ .

$\therefore$ x R a, x R b

**ومن النتيجة السابقة التي حصلنا عليها نستنتج أن:**

[x] = [a] , [x] = [b]

**أي أن** [a] = [b]. **وهو المطلوب إثباته.**

**تعريف:**

**نفرض أن** R **علاقة تكافؤ على مجموعة** X. **المجموعات** [a] **المعرفة في نظرية ٢-٤ يطلق عليها طبقات تكافؤ المجموعة X (equivalence classes of) التي تولدها العلاقة** R (given by the relation R).

**مثال ٢-٣٤:**

**نفرض أن** R **هي علاقة التكافؤ المبينة في مثال ٢-٢٩. اكتب طبقات التكافؤ التي تولدها** R.

**الحل:**

**طبقة التكافؤ** [1] **التي تحتوي على** 1 **تتكون من جميع العناصر** x **التي تحقق الشرط** $(x, 1) \in R$ ، **ولذلك فإن:**

[1] = {1, 3, 5}

**وبالمثل يمكننا إيجاد باقي طبقات التكافؤ:**

[3] = [5] = {1, 3, 5},
[2] = [6] = {2, 6},
[4] = {4}.

**مثال ٢-٣٥:**

**ارسم ثنائي بيان (diagraph) علاقة التكافؤ R المبينة في مثال ٢-٢٩. ثم بَيِّن على الرسم طبقات التكافؤ التي تولدها R (والتي حصلت عليها في المثال السابق ، مثال ٢-٣٤).**

**الحل:**

**ثنائي بيان علاقة التكافؤ R مرسوم في حل مثال ٢-٣١. وطبقات التكافؤ الثلاث (التي تولدها R) تظهر في هذا الرسم بوضوح حيث تمثلها البيانات الجزئية (subgraphs) الثلاثة والتي رؤوسها هي: .{4} ,{2, 6} ,{1, 3, 5}. وعموما فإن طبقات التكافؤ تظهر بوضوح في ثنائي بيان أي علاقة تكافؤ. والبيان الجزئي G (subgraph) الذي يمثل طبقة تكافؤ هو أكبر بيان جزئي – من ثنائي البيان الأصلي – يحقق الخاصية: أنه لأي رأسين v, w في G يوجد حرف موجه (directed edge) من v إلى w. مثلا إذا كان $v, w \in \{1, 3, 5\}$ فإنه يوجد حرف موجه من v إلى w. وزيادة على ذلك فإنه لا يمكن إضافة (adding) أي رؤوس إضافية (additional vertices) إلى 1, 3, 5 ، وهكذا فإن مجموعة الرؤوس الناتجة (resulting vertex set) تحتوي على حرف موجه بين كل زوج من الرؤوس.**

**مثال ٢-٣٦:**

(أ) **هناك طبقتا تكافؤ بالنسبة لعلاقة التكافؤ المعطاة في مثال ٢-٣٢ ، وهما:**

$$[1] = [3] = [5] = \{1, 3, 5\}$$
$$[2] = [4] = \{2, 4\}$$

(ب) **طبقات التكافؤ بالنسبة لعلاقة التكافؤ المعرفة في مثال ٢-٢٣ هي:**

$$[a] = \{a\}, \quad [b] = \{b\}, \quad [c] = \{c\}$$

**مثال ٢-٣٧:**

**نفرض أن** $X = \{1, 2, ..., 10\}$.

**نعرِّف** x R y **بأنها تعني أن 3 تقسم** x – y **. اثبت أن R علاقة تكافؤ على X ، وحدد عناصر طبقات التكافؤ.**

**الحل:**

**يسهل التحقق من أن العلاقة R انعكاسية ومتناظرة ومتعدية (ونترك ذلك التحقق للقارئ الكريم) ، وبالتالي فإن R هي علاقة تكافؤ على X.**

**طبقة التكافؤ [1] تتكون من جميع العناصر x التي تحقق العلاقة x R 1. أي أن:**

$$[1] = \{x \in X \mid 3\,\text{divides} \quad x - 1\} = \{1, 4, 7, 10\}$$

**وبالمثل:**

[2] = {2, 5, 8}
[3] = {3, 6, 9}

**وهذه المجموعات الثلاث تجزئ X. ولاحظ أن**

[1] = [4] = [7] = [10],
[2] = [5] = [8],
[3] = [6] = [9].

**وبالنسبة لهذه العلاقة فإن التكافؤ (equivalence) يعني: " له الباقي نفسه (same remainder) حينما يُقسم على 3".**

**نظرية ٢-٥:**

**نفرض أن R علاقة تكافؤ على مجموعة محدودة X (finite set). إذا احتوت كل طبقة تكافؤ على r عنصر فإن عدد طبقات التكافؤ يساوي |x| / r.**

**البرهان:**

X

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X_1$ (عنصر r) | $X_2$ (عنصر r) | ... | $X_k$ (عنصر r) |

$$|X| = r\,k$$

**نفرض أن** $X_1, X_2, ..., X_k$ **ترمز إلى طبقات التكافؤ المختلفة (distinct). نظرا لأن هذه المجموعات تجزئ X ، فلذلك**

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_k|$$
$$= r + r + \cdots + r = kr$$

**أي أن عدد طبقات التكافؤ يساوي:**

$$k = |X| / r$$

## خامسا: الدوال
## Functions

**الدالة هي نوع خاص من العلاقة** (relation)**. وقد ذكرنا سابقا أن العلاقة** R **من** X **إلى** Y **هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي** $X \times Y$ ، **وأن مجال** R **هو:**

$$\text{domain } R = \{x \in X \mid (x, y) \in R \text{ for some } y \in Y\}$$

**وإذا كانت** f **علاقة من** X **إلى** Y ، **فلكي تكون** f **دالة أيضا يجب أن يكون مجال** f **مساويا** X ، **وإذا كان كل من** $(x, y), (x, y')$ **في** f **فيجب أن تكون** $y = y'$.

**تعريف:**

**الدالة** f **من** X **إلى** Y **هي علاقة من** X **إلى** Y **بحيث أن:**

(١) **مجال** f **هو** X.

(٢) **إذا كان** $(x, y), (x, y') \in f$ **فإن** $y = y'$.

**وأحيانا نرمز للدالة من** X **إلى** Y **هكذا:** $f : X \to Y$

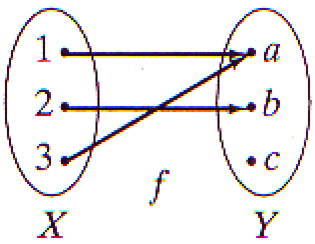
**مثال ٢–٣٨:**

**العلاقة**

$$f = \{(1, a),\ (2, b),\ (3, a)\}$$

**من** $X = \{1, 2, 3\}$ **إلى** $Y = \{a, b, c\}$ **تعد دالة من** X **إلى** Y**. مجال** f **هو** X **ومداها هو** $\{a, b\}$.

ويمكن تمثيل هذا الوضع بالشكل التالي حيث السهم المتجه من j إلى x يعني أن j مرتبطة بـ x (j is related to). ويطلق على مثل هذا الشكل " المخطط السهمي " (arrow diagram).




المخطط السهمي
arrow diagram

وكي يمثل المخطط السهمي دالة ، فيجب أن يكون هناك سهم واحد بالضبط من كل عنصر في المجال ، وتتحقق هذه الخاصية في هذا الشكل ، ولذا فهو يمثل دالة.

والمتتالية (sequence) نوع خاص من الدوال. والمتتالية التي أصغر مؤشراتها 1 (smallest index:) تعد دالة مجالها إما مجموعة جميع الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة صيغتها {1, 2, ..., n}. فمثلا متتالية مثال ٢-٦-(i) مجالها مجموعة جميع الأعداد الصحيحة الموجبة ، بينما متتالية مثال ٢-٦-(ii) مجالها {1, 2, 3, 4, 5}.

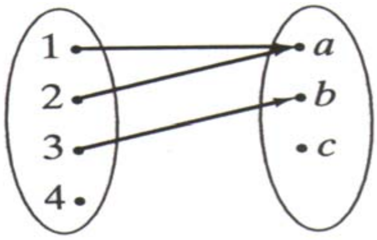
مثال ٢-٣٩:

العلاقة

$$R = \{(1, a),\ (2, a),\ (3, b)\}$$

من X = {1, 2, 3, 4} إلى Y = {a, b, c} ليس دالة من X إلى Y ، حيث أن الشرط الأول (١) في تعريف الدالة غير متحقق ، حيث أن مجال R وهو {1, 2, 3} لا يساوي X = {1, 2, 3, 4}.

وواضح أيضا من المخطط السهمي التالي أن هذه العلاقة ليست دالة ، حيث لا يوجد سهم من 4. أما إذا اعتبرنا R علاقة من $X' = \{1, 2, 3\}$ إلى $Y = \{a, b, c\}$ ، فإنها ستكون دالة من $X'$ إلى Y.




R

X Y

المخطط السهمي

**مثال ٢-٤٠:**

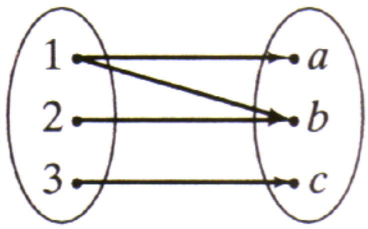
العلاقة

$$R = \{(1, a),\ (2, b),\ (3, c),\ (1, b)\}$$

من $X = \{1, 2, 3\}$ إلى $Y = \{a, b, c\}$ ليس دالة من X إلى Y ، حيث أن الشرط الثاني (٢) في تعريف الدالة غير متحقق ، حيث أن

$$a \neq b \quad \text{ولكن} \quad (1, a),\ (1, b) \in R$$

كما يتضح من المخطط السهمي أن هذه العلاقة ليست دالة لأن هناك سهمين من 1.




R

X Y

المخطط السهمي

وإذا أُعطينا دالة f من X إلى Y ، فبناء على تعريف الدالة: لكل عنصر x في المجال X توجد بالضبط قيمة واحدة $y\ [y \in Y]$ ، حيث $(x, y) \in f$ . هذه القيمة الوحيدة y يُرمز لها بالاصطلاح f(x). وبأسلوب آخر فإن $y = f(x)$ هي طريقة أخرى لكتابة $(x, y) \in f$ .

**مثال ٢-٤١:**

بالنسبة للدالة f المذكورة في مثال ٢-٣٨ يمكننا أن نكتب:

f(1) = a,  f(2) = b,  f(3) = a

المثال التالي يبين كيف أننا نستخدم أحيانا الاصطلاح f(x) لتعريف دالة.

**مثال ٢-٤٢:**

نفرض أن f هي الدالة المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$ . مثلا:

f(2) = 4,  f(-3.5) = 12.25,  f(0) = 0

رغم أن كثيرا من الدوال تُعرَّف بهذه الكيفية إلا أن التعريف يعد ناقصا وذلك لأن المجال غير محدد. فإذا فرضنا أن المجال هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ، فيمكننا تعريف f بصيغة الزوج المرتب:

$$f = \{(x, x^2) \mid x \text{ is a real number}\}$$

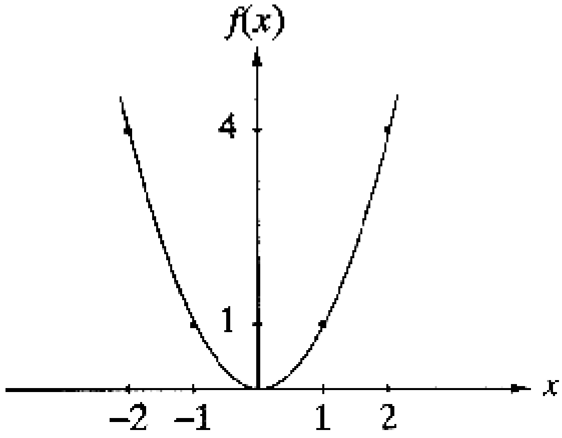
ومدى f هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية غير السالبة.

*  *  *

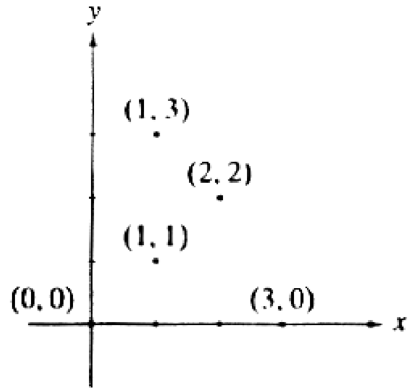
وهناك طريقة أخرى للتعبير عن دالة ما أو لتصويرها وهي رسم منحناها / بيانها (**graph**). ونحصل على بيان أي دالة f مجالها ومداها مجموعتان جزئيتان من الأعداد الحقيقية بوضع / تنقيط (plotting) نقاط في المستوى تقابل عناصر f. والمحور الأفقي (horizontal axis) يحتوي على المجال ، بينما يحتوي المحور الرأسي (vertical axis) على المدى.

**مثال ٢-٤٣:**

الشكل التالي يعطي منحنى / بيان دالة المثال السابق $f(x) = x^2$




**نلاحظ أن أي مجموعة** S **من النقاط في المستوى تعرِّف دالة بدقة حينما يقابل أي خط رأسي على الأكثر نقطة واحدة من نقاط** S. **أما إذا احتوى أحد الخطوط الرأسية على نقطتين أو أكثر من نقاط مجموعة فإن نقطة المجال** (domain point) **حينئذ لا تعطينا نقطة مدى وحيدة** (unique range point) **مقابلة ، وبالتالي فإن المجموعة حينئذ لا تعرِّف دالة كالمجموعة المبينة في الشكل التالي ، حيث يمر الخط الرأسي** x = 1 **بنقطتين من نقاط المجموعة.**




**ومن الدوال التي لها تطبيقات هامة في الرياضيات وعلم الحاسوب تلك التي تشتمل على مؤثر المقياس** (modulus operator).

**تعريف:**

**نفرض أن** x **عدد صحيح غير سالب و** y **عدد صحيح موجب.** x mod y **يُعرَّف بأنه الباقي الصحيح عند قسمة** x **على** y.

**فمثلا:**

| | | |
|---|---|---|
| 6 mod 2 = 0 , | 5 mod 1 = 0 , | 8 mod 12 = 8 , |
| 7 mod 2 = 1 , | 19673 mod 2 = 1 , | 19674 mod 2 = 0 |

**مثال ٢-٤٤:**

**أي يوم من أيام الأسبوع سيكون اليوم الذي يأتي 365 يوما بعد سيد الأيام الذي جعله الله لنا عيدا أسبوعيا ، أي بعد يوم جمعة[١]؟**

**الحل:**

**نعلم أن اليوم الذي يأتي 7 أيام ، أو 14 يوما ، أو .... ، أو 7n يوما (حيث n عدد صحيح موجب) بعد يوم جمعة هو أيضا يوم جمعة. ولذلك فإننا نحتاج لأن نطرح من 365 أكبر قدر ممكن من مضاعفات 7 لنرى عدد الأيام المتبقية بعد ذلك. هذا العدد هو بالضبط 365 mod 7 ، وحيث أن**

$$365 \bmod 7 = 1$$

**لذلك فإن اليوم المطلوب هو يوم سبت.**

**مثال ٢-٤٥:**

**رقم الكتاب القياسي الدولي [International Standard Book Number (ISBN)] عبارة عن شفرة / كود (code) مكون من 10 رموز تفصلها شُرَط (dashes) مثل 0-8065-0959-7. ويتكون أي رقم ISBN من أربعة أجزاء : (i) شفرة المجموعة (group code) مثل 0 ، وتشير إلى مجموعة الدول التي تتحدث بلغة معينة كالإنجليزية مثلا. (ii) شفرة الناشر (publisher code) مثل 8065. (iii) شفرة الكتاب (book code) مثل 0959 (لتحديد الكتاب من بين كتب الناشر**

---

[١] **قال رسول الله صلى الله عليه وسلم: "سيد الأيام يوم الجمعة ، ... ، وفيه ساعة لا يسأل العبد فيها شيئا إلا آتاه الله تعالى إياه ما لم يسأل حراما ، ... " (أحمد وابن ماجه).**

**وقال صلى الله عليه وسلم في جمعة من الجمع: " يا معشر المسلمين هذا يوم جعله الله لكم عيدا ... " (الطبراني).**

**وقال صلى الله عليه وسلم: " خير يوم طلعت فيه الشمس يوم الجمعة ، ... ، ولا تقوم الساعة إلا في يوم الجمعة " (مسلم).**

المعين). (iv) رمز تحقق (check character) مثل 7 ، ويستخدم للتحقق من صحة رموز الرقم ISBN (to validate) حيث تُحسب قيمة رمز التحقق بالصيغة:

رمز التحقق = check character = s mod 11

حيث
$$s = \sum_{i=1}^{9} i.d_i = d_1 + 2d_2 + 3d_3 + \cdots + 9d_9$$

حيث $d_i$ هو الرقم (digit) الذي ترتيبه i من بين الأرقام (الرموز) التسعة الأولى في رقم الكتاب القياسي الدولي ISBN. ورمز التحقق الناتج هو الرمز العاشر في الرقم ISBN ، ومعلوم أن ناتج العملية s mod 11 هو أي قيمة من 0 إلى 10. فإن كانت أي قيمة من 0 إلى 9 فهي نفسها رمز التحقق ، وإن كانت 10 فرمز التحقق هو الحرف X.

مثلا بالنسبة للرقم ISBN السابق: 0-8065-0959-7

$$s = 0 + 2\times 8 + 3\times 0 + 4\times 6 + 5\times 5 + 6\times 0 + 7\times 9 + 8\times 5 + 9\times 9$$
$$= 249$$

check character = 249 mod 11 = 7

**مثال ٢-٤٦:**

نفرض أن لدينا مجموعة من الخلايا (cells) في ذاكرة حاسوب ، وأن هذه الخلايا مُرَقَّمة / مؤشر عليها (indexed) بأرقام من 0 إلى 10 (انظر الشكل). المطلوب تخزين (storing) أعداد صحيحة اختيارية غير سالبة في هذه الخلايا واستعادتها / استرجاعها (retrieving) منها. وإحدى الطرق للوصول إلى ذلك استخدام دالة بعثرة (**a hash function**). ودالة البعثرة تأخذ وحدة البيانات (a data item) المطلوب تخزينها أو استرجاعها ، وتحسب الاختيار الأول (first choice) لموضع (location) لهذه الوحدة من البيانات. مثلا نفرض أن المطلوب تخزين أو استعادة العدد n. يمكننا حساب الاختيار الأول للموضع بالصيغة n mod 11. أي أن دالة البعثرة تصبح

$$h(n) = n \bmod 11$$

| 132 | | | 102 | 15 | 5 | 257 | | 558 | | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

**خلايا في ذاكرة حاسوب**

Cells in a computer memory

**والشكل السابق يوضح نتيجة تخزين الأعداد**

15, 558, 32, 132, 102, 5

**بهذا الترتيب في خلايا فارغة ابتداء** (initially empty cells).

**نفرض الآن أننا نريد تخزين العدد** 257**. نظرا لأن**

$h(257) = 257 \bmod 11 = 4$

**فالمفروض أن نقوم بتخزين** 257 **في الموضع** 4**. ولكن حيث أن هذا الموضع مشغول فعلا** (already occupied) **، فإننا نقول في هذه الحالة إن تصادما / تضاربا (collision) قد حدث** (occurred)**. وبتعبير أدق تقول إن تصادما / تضاربا يحدث لدالة بعثرة** H **إذا كان**

$$H(x) = H(y), \qquad x \neq y$$

**ولمعالجة** (handling) **هذا التضارب نحتاج إلى طريقة / سياسة ما لفك / لتفريق هذا التضارب / التصادم (collision resolution policy). ومن أبسط هذه الطرق أن نبحث عن أول خلية تالية (أكبر) غير مشغولة** (next highest unoccupied cell) **[مع فرض أن الخلية التي تلي الخلية رقم** 10 **هي الخلية رقم** 0**]. وبإتباع هذه الطريقة فإننا نقوم بتخزين** 257 **في الموضع رقم** 6 **(انظر الشكل).**

**وإذا أردنا أن نعين موضع** (locate) **قيمة مخزونة** n **، فإننا نحسب** $m = h(n)$ **ونبدأ البحث عند الموضع** m**. فإن لم تكن** n **موجودة في هذا الموضع فإننا ننظر في الموضع التالي (الأكبر) [مرة أخرى بفرض أن** 0 **يلي** 10**]. فإن لم تكن** n **في هذا الموضع أيضا ، فإننا نتقدم إلى الموضع التالي ، وهكذا. فإذا وصلنا إلى خلية فارغة** (empty cell) **أو عدنا إلى موضعنا الأصلي الذي بدأنا عنده ، فإننا نستنتج أن** n **غير موجودة ، وإلا فإننا نحصل على موضع** n.

**وإذا لم يتكرر حدوث هذه التضاربات بكثرة ، وإذا أمكن تفريق أي تضارب – إذا حدث – بسرعة ، فإن البعثرة** (hashing) **تعد طريقة سريعة جدا لتخزين واسترجاع البيانات. فعلى سبيل المثال كثيرا ما يتم تخزين واسترجاع البيانات الشخصية ببعثرة الأرقام التعريفية للموظفين** (hashing on employee identification numbers).

* * *

**كثيرا ما تستخدم الحواسيب لمحاكاة** (simulating) **السلوك العشوائي** (random behavior). **فبرنامج ألعاب** (game program) **قد يحاكي عملية إلقاء النرد** (rolling dice) ، **وبرنامج خدمات العميل** (a client service program) **قد يحاكي عملية وصول الزبائن / العملاء** (arrival of customers) **إلى البنك. ومثل هذه البرامج تقوم بتوليد** (generating) **أعداد تبدو عشوائية ويطلق عليها "أعداد عشوائية زائفة أو أعداد شبه عشوائية" (pseudorandom numbers). فمثلا برنامج إلقاء النرد** (dice-rolling program) **يحتاج أزواجا** (pairs) **من الأعداد شبه العشوائية ، حيث يتراوح أي عدد منها بين** 1 **و** 6 **لمحاكاة نتائج إلقاء النرد. والأعداد شبه العشوائية ليست في الحقيقة عشوائية ،وإذا عُرِف البرنامج الذي يولِّد هذه الأعداد أمكننا التنبؤ** (predicting) **بها.**

**مثال ٢-٤٧:**

**الطريقة التي تُستخدم عادة لتوليد أعداد شبه عشوائية يطلق عليها "طريقة المطابقة الخطية" (linear congruential method). وتتطلب هذه الطريقة أربعة أعداد صحيحة: المقياس** m (modulus) ، **والضارب** a (multiplier) ، **والزيادة** c (increment) ، **وبذرة** s (seed). **وهذه الأعداد تحقق الشروط:**

$$2 \le a < m, \qquad 0 \le c < m, \qquad 0 \le s < m.$$

**ونبدأ بجعل** $x_0 = s$

**ثم نقوم بتوليد متتابعة** (sequence) **الأعداد شبه العشوائية** $x_1, x_2, \cdots$ **باستخدام الصيغة**

$$x_n = (a\, x_{n-1} + c) \bmod m$$

حيث تَحسب هذه الصيغة العدد شبه العشوائي التالي بمعرفة العدد السابق له مباشرة. فمثلا إذا كانت

$$m = 11, \quad a = 7, \quad c = 5, \quad s = 3$$

فإن:

$$x_0 = s = 3$$
$$x_1 = (a\ x_0 + c) \bmod m = (7 \times 3 + 5) \bmod 11 = 4$$
$$x_2 = (a\ x_1 + c) \bmod m = (7 \times 4 + 5) \bmod 11 = 0$$

وبالاستمرار في تطبيق هذه الصيغة نحصل على القيم التالية لعناصر هذه المتتابعة:

$$x_3 = 5, \quad x_4 = 7, \quad x_5 = 10, \quad x_6 = 9,$$
$$x_7 = 2, \quad x_8 = 8, \quad x_9 = 6, \quad x_{10} = 3,$$

وحيث أن $x_{10} = 3$ وهي قيمة البذرة s (seed) نفسها التي بدأنا بها ، فإن المتتابعة ستتكرر (repeats) ، أي أن القيم التالية ابتداء من $x_{10}$ ستكون:

3, 4, 0, 5, 7, ...

وقد بذلت جهود كثيرة للوصول إلى قيم جيدة (للأربعة أعداد التي نبدأ بها) لتوليد أعداد شبه عشوائية بطريقة المطابقة الخطية. وبالنسبة للتطبيقات الهامة حينما تكون المحاكاة حرجة (critical simulation) كتطبيقات الطيران (aircraft) والأبحاث النووية (nuclear research) فيجب أن تكون لدينا أعداد عشوائية جيدة. وعمليا نستخدم قيما كبيرة لكل من m, a. ومن القيم الشائعة الاستخدام:

$$m = 2^{31} - 1 = 2{,}147{,}483{,}647$$
$$a = 7^5 = 16{,}807$$
$$c = 0$$

هذه الأعداد تولد متتالية أعداد صحيحة عدد عناصرها $2^{31} - 1$ قبل أن تبدأ تكرار أي قيمة.

**تعريف:**

**أرضية (floor) أي عدد حقيقي x (real number) ، ونرمز لها بالرمز $\lfloor x \rfloor$: هي أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x.**

**وسقف (ceiling) أي عدد حقيقي x ، ونرمز له بالرمز $\lceil x \rceil$: هو أصغر عدد صحيح أكبر من أو يساوي x.**

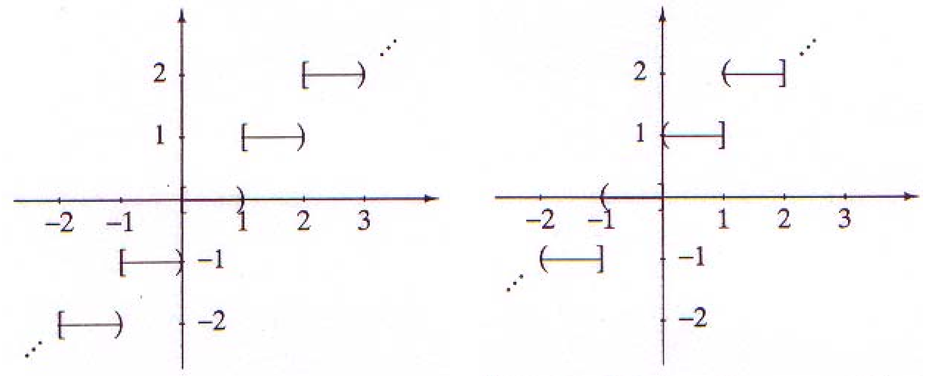
**فمثلا:**

$$\begin{array}{ll} \lfloor 8.3 \rfloor = 8, & \lceil 9.1 \rceil = 10, \\ \lfloor -8.7 \rfloor = -9, & \lceil -11.3 \rceil = -11, \\ \lceil 6 \rceil = 6, & \lceil -8 \rceil = -8 \end{array}$$

**ونلاحظ أن أرضية x تقرب x إلى أقرب عدد صحيح لأسفل (rounds x down) ، بينما سقفها يقربها لأعلى (rounds x up).**

**مثال ٢-٤٨:**

**الشكل التالي يعطي كلا من منحنى / بيان (graph) دالة الأرضية (floor) ومنحنى دالة السقف (ceiling). ونلاحظ أن القوس ] أو القوس [ يعني أن النقطة داخلة / محتواة (included) في المنحنى ، بينما القوس ) أو القوس ( يعني أن النقطة مستبعدة (excluded) من المنحنى.**




**بيان دالة الأرضية $\lfloor \ \rfloor$** **بيان دالة السقف $\lceil \ \rceil$**

**مثال ٢-٤٩:**

**نفرض أن الأجرة البريدية تحسب كما يلي:**

- ٣٣ **درهما لأول أوقية** (ounce) **أو أي كسر** (fraction) **منها.**
- ٢٢ **درهما لكل أوقية إضافية** (each additional ounce) **أو أي كسر منها.**

**اكتب المعادلة التي تعطي قيمة الأجرة البريدية** P(w) **كدالة في وزن الرسالة البريدية بالأوقية** w. **استخدم المعادلة لحساب قيمة كل من** P(3.7), P(2). **ثم ارسم بيان الدالة** P.

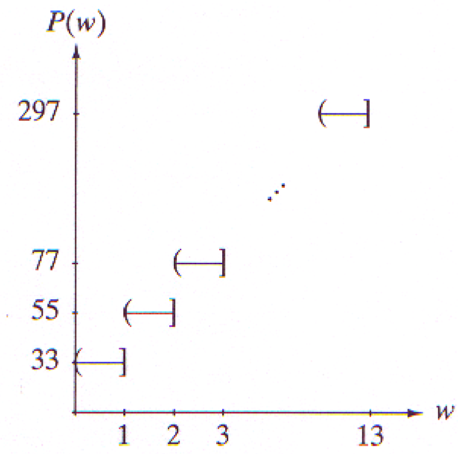
**الحل:**

$$P(w) = 33 + 22\lceil w-1 \rceil, \qquad 13 \ge w > 0$$

**التعبير** $\lceil w-1 \rceil$ **يحسب عدد الأوقيات الإضافية الزائدة عن الأوقية الأولى (أي الزائدة عن** 1**) ، حيث أي كسر يُحسب كأوقية واحدة إضافية.**

$P(3.7) = 33 + 22\lceil 3.7-1 \rceil = 33 + 22\lceil 2.7 \rceil = 33+22\times 3 = 99$

$P(2) = 33 + 22\lceil 2-1 \rceil = 33 + 22\lceil 1 \rceil = 33+22\times 1 = 55$




**بيان دالة الأجرة البريدية** $P(w) = 33 + 22\lceil w-1 \rceil$

**تعريف:**

**يقال لدالة** f **من** X **إلى** Y **إنها واحد لواحد (one-to-one) أو متباينة (injective) إذا تحقق الشرط التالي:**

لأي عنصر $y \in Y$ يوجد على الأكثر عنصر واحد $x \in X$ بحيث أن $f(x) = y$. أي أنه:

$$\forall\ y \in Y \qquad \exists \text{ at most one } x \in X \ \ni\ f(x) = y$$

وهذا الشرط يكافئ الاقتضاء التالي:

$$[x, x' \in X \quad \& \quad f(x) = f(x')] \ \Rightarrow \ x = x'$$

نظرا لأن كمية البيانات المطلوب تخزينها تكون عادة أكبر بكثير من حيِّز الذاكرة المتاح (available memory) ، فعادة لا تكون دوال البعثرة (hash functions) متباينة / واحد لواحد. وبأسلوب آخر فإن معظم دوال البعثرة تؤدي إلى تضاربات.

**مثال ٢-٥٠:**

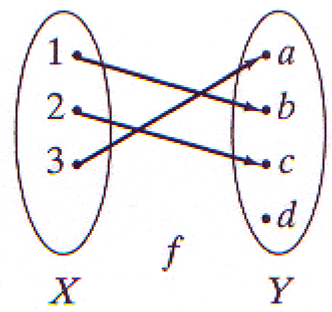
الدالة

$$f = \{(1, b), (3, a), (2, c)\}$$

من $X = \{1, 2, 3\}$ إلى $Y = \{a, b, c, d\}$

متباينة / واحد لواحد.

ويلاحظ أنه إذا كانت دالة من X إلى Y متباينة / واحد لواحد ففي المخطط السهمي (arrow diagram) للدالة نجد أن أي عنصر في Y سيشير إليه (point to it) على الأكثر سهم واحد فقط ، كما يتضح من المخطط السهمي التالي لدالة هذا المثال.



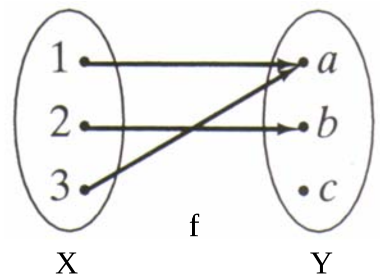

**مثال ٢-٥١:**

دالة مثال ٢-٣٨ وهي

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$$

من $X = \{1, 2, 3\}$ إلى $Y = \{a, b, c\}$

**ليست دالة متباينة (أي ليست واحدا لواحد). وهذا يتضح أيضا من المخطط السهمي التالي للدالة ، حيث نجد أن العنصر** a **في** Y **يشير إليه سهمان (أي أكثر من سهم واحد).**




**تعريف:**

**يقال لدالة** f **من** X **إلى** Y **إنها على Y (onto Y) أو إنها دالة غامِرة (onto function / surjective function) إذا كان مدى** f (range of) **هو** Y.

**مثال ٢–٥٢:**

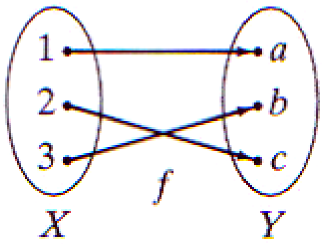
i) **الدالة**

$$f = \{(1, a), (2, c), (3, b)\}$$

من $X = \{1, 2, 3\}$ إلى $Y = \{a, b, c\}$

**دالة متباينة (واحد لواحد) وعلى** Y (one-to-one and onto Y)

**ويلاحظ أنه إذا كانت دالة من** X **إلى** Y **غامرة أي** onto **ففي المخطط السهمي للدالة نجد أن أي عنصر في** Y **سيشير إليه على الأقل سهم واحد ، كما يتضح من المخصص السهمي التالي للدالة** i) **في هذا المثال.**




ii) **دالة مثال ٢–٥٠ ، وهي الدالة**

$f = \{(1, b), (3, a), (2, c)\}$

من $X = \{1, 2, 3\}$ إلى $Y = \{a, b, c, d\}$

ليست على $Y = \{a, b, c, d\}$ (not onto).

ولكنها على $\{a, b, c\}$ (onto).

ويتضح لنا أيضا أن هذه الدالة ليست (onto Y) من مخططها السهمي المرسوم في مثال ٢–٥٠ ، حيث نجد أن عنصرا من عناصر Y – وهو العنصر d – لم يشر إليه أي سهم.

**تعريف:**

يقال لدالة إنها تَقَابُل (**bijection**) إذا كانت متباينة وغامرة معا [أي كانت واحدا لواحد وعَلَى معا ، (both one-to-one and onto)].

فمثلا دالة مثال ٢–٥٢–i) تعد تقابلا.

الأشكال التالية توضح المفاهيم (concepts) السابقة الخاصة بتعريف الدالة وأنواعها المختلفة. وفي كل من هذه الأشكال النقاط التي على اليسار تقع في مجال (domain) f ، بينما النقاط التي على اليمين تقع في مدى f (codomain/range) ، والأسهم تبين العلاقة $(x, f(x))$.

دالة

a function

ليست دالة

not a function

تَقَابُل

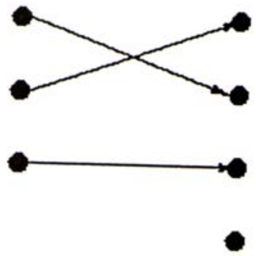
a bijection

دالة عَلَى / غامرة

onto / surjective fn.

(ليست واحدا لواحد)

(not one-to-one)



دالة متباينة (واحد لواحد)

injective (one-to-one) fn.

(ليست عَلَى / غامرة)

(not onto / surjective)

**تعريف: معكوس الدالة f (f inverse)**

**نفرض أن** f **دالة متباينة (واحد لواحد) وغامرة** (onto) **من** X **إلى** Y**. يمكن إثبات أن معكوس هذه العلاقة**

$$\{(y,x) \mid (x,y) \in f\}$$

**دالة من** Y **إلى** X**. وهذه الدالة الجديدة يطلق عليها معكوس f (f inverse) ، ويرمز لها بالرمز** $f^{-1}$.

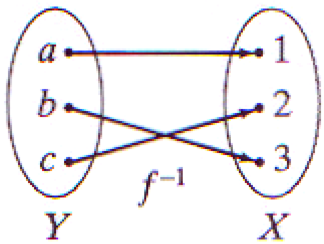
**مثال ٢-٥٣:**

**نفرض أن** f **هي دالة مثال ٢-٥٢-i).**

**اكتب معكوس** f **أي الدالة** $f^{-1}$ **، وارسم مخططها السهمي.**

**الحل:**

$$f^{-1} = \{(a,1), (c,2), (b,3)\}$$




**المخطط السهمي للدالة** $f^{-1}$

نلاحظ أنه يمكننا الحصول على المخطط السهمي للدالة $f^{-1}$ بمجرد عكس اتجاه كل سهم في المخطط السهمي للدالة f (انظر مثال ٢-٥٢-i). وهذه الملاحظة صحيحة عموما بالنسبة لأي دالة إذا كانت تقابلا ( أي واحدا لواحد و onto).

**مثال ٢-٥٤:**

الدالة

$$f(x) = 2^x$$

دالة واحد لواحد من مجموعة جميع الأعداد الحقيقية R على (onto) مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الموجبة $R^+$. استنتج صيغة للمعكوس $f^{-1}(y)$.

**الحل:**

نفرض أن $(y, x) \in f^{-1}$

أي أن $f^{-1}(y) = x$

$$\Rightarrow \quad (x, y) \in f \quad \Rightarrow$$

$$y = 2^x$$

$$\Rightarrow \quad \log_2 y = x$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(y) = x = \log_2 y$$

أي أنه لأي $y \in R^+$ فإن $f^{-1}(y)$ هي لوغاريتم y للأساس 2. أي أن معكوس الدالة الأسية (exponential function) هو الدالة اللوغاريتمية (logarithm function).

* * *

ونظراً لأن الدوال هي أنواع خاصة من العلاقات ، فيمكننا تكوين تركيب دالتين (**composition of two functions**). نفرض أن g دالة من X إلى Y و f دالة من Y إلى Z. فإذا أُعطينا $x \in X$ فيمكننا تطبيق الدالة g لنعيِّن عنصرا

**وحيـدا** $y = g(x) \in Y$ **. ثـم يمكننـا بعـد ذلـك تطبيـق** f **لتعـيين عنصـر وحيـد** $z = f(y) = f(g(x)) \in Z$ **. الدالـة الناتجـة مـن** X **إلى** Z **يطلـق عليها تركيب f مع g** **(composition of f with g) ، ويرمز لها هكذا:** $f \circ g$ **.**

**مثال ٢-٥٥:**

**نفرض أن**

$$g = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$$

**دالة من** $X = \{1, 2, 3\}$ **إلى** $Y = \{a, b, c\}$

**وأن**

$$f = \{(a, y), (b, x), (c, z)\}$$

**دالة من** Y **إلى** $Z = \{x, y, z\}$

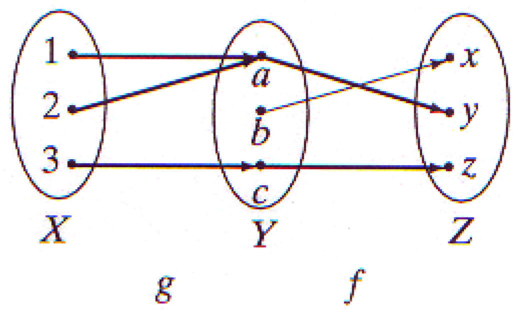
**ما هي دالة التركيب** (composition function) **من** X **إلى** Z **؟**

**الحل:**

$$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, z)\}$$

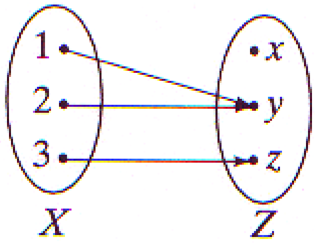
**مثال ٢-٥٦:**

**الشكل التالي يعطي المخطط السهمي لدالـة** g **مـن** X **إلى** Y **، والمخطط السهمي لدالة** f **من** Y **إلى** Z**. أوجد السهمي لدالة التركيب** $f \circ g$ **.**




**الحل:**

للحصـول علـى المخطـط السهمي للتركيـب $f \circ g$ نتتبـع ببسـاطة الأسـهم ، فنرسـم سـهما مـن $x \in X$ إلى $z \in Z$ بشـرط وجـود أسـهم مـن $x$ إلى عنصـر مـا $y \in Y$ ومن $y$ إلى $z$. فنحصل على المخطط السهمي التالي للتركيب $f \circ g$.




$f \circ g$

ملاحظة:

دالتا المخططين السهميين المعطيين $f, g$ ودالـة التركيـب $f \circ g$ للمخطـط السهمي المطلوب هي دوال المثال السابق (مثال ٢-٥٥).

**مثال ٢-٥٧:**

نفرض أن

$$f(x) = \log_3 x \,, \quad g(x) = x^4$$

أوجد كلا من الدالتين $g(f(x))$ , $f(g(x))$.

الحل:

$$f(g(x)) = \log_3 (x^4)$$

$$g(f(x)) = (\log_3 x)^4$$

**مثال ٢-٥٨:**

أحيانـا يسـمح لنـا التركيـب (composition) بتفكيـك (/تحليـل/تفريق) (decomposition) دوال معقدة (complicated) إلى دوال أبسط. فمثلا الدالة

$$f(x) = \sqrt{\sin 2x}$$

يمكن تفكيكها إلى الدوال

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = \sin x, \quad w(x) = 2x$$

وبالتالي يمكننا كتابة

$$f(x) = g(h(w(x)))$$

ويُعد أسلوب التفكيك (decomposition technique) هذا مهما في حسبان التفاضل (differential calculus) نظرا لوجود قواعد لمفاضلة الدوال البسيطة مثل g, h, w ، وقواعد لكيفية مفاضلة تركيب الدوال. وبالجمع بين (combining) هذه القواعد يمكننا مفاضلة الدوال الأكثر تعقيدا.

**المؤثر الثنائي (binary operator)** على مجموعة X يُلحِق (associates) بكل زوج مرتب من العناصر في X عنصرا واحدا في X.

**تعريف:**

أي دالة من $X \times X$ إلى / في (from $X \times X$ into X) يطلق عليها "مؤثر ثنائي" على X (**binary operator on X**).

**مثال ٢-٥٩:**

(i) نفرض {... ,1, 2} = X

إذا عرَّفنا

$$f(x, y) = x + y; \qquad x, y \in X$$

فإن f مؤثر ثنائي على X.

(ii) نفرض {a, b, c} = X

ونعرِّف

$$f(s, t) = st; \qquad s, t: \text{ strings over } X$$

أي أن كلا من s, t سلسلة على X ، و st هو تعاقب (concatenation) السلسلتين s, t.

f: مؤثر ثنائي على $X^*$.

أما **المؤثر الأحادي (unary operator)** على مجموعة X فإنه يُلحِق (associates) بكل عنصر وحيد (single element) في X عنصرا واحدا في X.

**تعريف:**

**أي دالة من** X **إلى / في** X (from X into X) **يطلق عليها "مـؤثر أحـادي" على X (unary operator on X).**

**مثال ٢–٦٠:**

**نفرض أن** U **مجموعة شاملة** (a universal set).

**إذا عَرَّفنا**

$$f(X) = \overline{X}, \qquad X \subseteq U,$$

**فإن** f **مؤثر أحادي على** P(U).

## تمرينات رقم ٢

### أولا: المجموعات

٢-١ نفرض أن المجموعة الشاملة هي المجموعة $U = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$.
ونفرض أن

$$A = \{1, 4, 7, 10\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad C = \{2, 4, 6, 8\}$$

اذكر عناصر كل من المجموعات التالية:

أ) $A \cup B$ ب) $B \cap C$

ت) $A - B$ ث) $B - A$

ج) $\overline{A}$ ح) $U - C$

خ) $\overline{U}$ د) $A \cup \phi$

ذ) $B \cap \phi$ ر) $A \cup U$

ز) $B \cap U$ س) $A \cap (B \cup C)$

ش) $\overline{B} \cap (C - A)$ ص) $(A \cap B) - C$

ض) $\overline{A \cap B} \cup C$ ط) $(A \cup B) - (C - B)$

٢-٢ ارسم شكل فن المقابل لكل مما يلي مع تظليل المجموعة المعطاة.

أ) $A \cap \overline{B}$ ب) $\overline{A} - B$

ج) $B \cup (B - A)$ د) $(A \cup B) - B$

هـ) $B \cap (\overline{C \cup A})$ و) $(\overline{A} \cup B) \cap (\overline{C} - A)$

ز) $((C \cap A) - \overline{(B - A)}) \cap C$

ح) $(B - \overline{C}) \cup ((B - \overline{A}) \cap (C \cup B))$

٢-٣ نفرض أن لدينا مجموعة (group) مكونة من 191 طالب ، منهم 10 يدرسون اللغة العربية وعلم الحاسوب والثقافة الإسلامية ، و36 يدرسون اللغة العربية وعلم الحاسوب ، و20 يدرسون اللغة العربية والثقافة الإسلامية ، و18 يدرسون

علم الحاسوب والثقافة الإسلامية ، و65 يدرسون اللغة العربية ، و76 يدرسون علم الحاسوب ، و63 يدرسون الثقافة الإسلامية.

أ) كم عدد الطلاب الذين يدرسون اللغة العربية والثقافة الإسلامية ولا يدرسون علم الحاسوب ؟

ب) كم عدد الطلاب الذين يدرسون علم الحاسوب ولا يدرسون اللغة العربية ولا الثقافة الإسلامية ؟

ج) كم عدد الطلاب الذين يدرسون اللغة العربية أو علم الحاسوب (أو كليهما) ؟

د) كم عدد الطلاب الذين يدرسون الثقافة الإسلامية أو اللغة العربية (أو كليهما) ولكن لا يدرسون علم الحاسوب ؟

هـ) كم عدد الطلاب الذين لا يدرسون أيا من هذه المقررات الثلاثة ؟

٢-٤ في استبيان لمشاهدة البرامج التليفزيونية تم إجراؤه لـ 151 شخص تبين أن 68 يشاهدون برنامج "الشريعة والحياة" ، و61 يشاهدون برنامج "فقهاء الأمة" ، و52 يشاهدون برنامج "الجهاد سبيلنا" ، و16 يشاهدون برنامجي "الشريعة والحياة" و"فقهاء الأمة" ، و25 يشاهدون برنامجي "الشريعة والحياة" و "الجهاد سبيلنا" ، و19 يشاهدون برنامجي "فقهاء الأمة" و "الجهاد سبيلنا" و26 لا يشاهدون أيا من هذه البرامج. كم شخصا يشاهدون البرامج الثلاثة كلها ؟

٢-٥ نفرض أن $X = \{1, 2\}, \quad Y = \{a, b, c\}$

اذكر عناصر كل من المجموعات التالية:

أ) $X \times Y$ ب) $Y \times X$

ج) $X \times X$ د) $Y \times Y$

٢-٦ نفرض أن $X = \{1, 2\}, \quad Y = \{a\}, \quad Z = \{\alpha, \beta\}$

اذكر عناصر كل من المجموعات التالية:

أ) $X \times Y \times Z$ ب) $X \times Y \times Y$

ج) $X \times X \times X$ د) $Y \times X \times Y \times Z$

**٢-٧ اذكر جميع تجزئات (all partitions) كل من المجموعات التالية:**

أ) $\{1\}$ ب) $\{1, 2\}$

ج) $\{a, b, c\}$ د) $\{a, b, c, d\}$

**٢-٨ اذكر صحة أو خطأ (true/false) كل مما يلي:**

أ) $\{x\} \subseteq \{x\}$ ب) $\{x\} \in \{x\}$

ج) $\{x\} \in \{x, \{x\}\}$ د) $\{x\} \subseteq \{x, \{x\}\}$

**٢-٩ اذكر ما إذا كانت مجموعتا كل زوج (pair of sets) من الأزواج التالية متساويتين (equal) أم لا:**

أ) $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}$

ب) $\{1, 2, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

ج) $\{1, 1, 3\}, \{3, 3, 1\}$

د) $\{x \mid x^2 + x = 2\}, \{1, -2\}$

هـ) $\{x \mid x \text{ is a real number and } 0 < x \leq 2\},\ \{1, 2\}$

**٢-١٠ أ) اكتب عناصر $P(\{a, b\})$، واذكر أي هذه العناصر تعد مجموعات جزئية صحيحة /فعلية (proper subsets) من المجموعة $\{a, b\}$.**

**ب) اكتب عناصر $P(\{a, b, c, d\})$، واذكر أي هذه العناصر تعد مجموعات جزئية صحيحة من المجموعة $\{a, b, c, d\}$.**

**ج) نفرض أن $X$ تحتوي على 10 عناصر. كم عدد عناصر $P(x)$ ؟ وكم عدد المجموعات الجزئية الصحيحة من المجموعة $\{a, b, c, d\}$؟**

**د) نفرض أن $X$ تحتوي على $n$ عنصر. كم عدد المجموعات الجزئية الصحيحة من المجموعة $X$ ؟**

٢-١١ نفــرض أن $X, Y$ مجموعتــان غــير خــاليتين (nonempty sets) ، وأن $X \times Y = Y \times X$ . ماذا يمكننا استنتاجه بخصوص المجموعتين $X, Y$ ؟

٢-١٢ نفرض أن $X, Y, Z$ مجموعات جزئية من مجموعة شاملة $U$. ونفرض أن المجموعة الشاملة لحواصل الضرب الكارتيزية هي $U \times U$ . لكل عبارة من العبارات التالية اكتب "true" إن كانت العبارة صادقة ، أو اعط مثالا مناقضا إن كانت العبارة خاطئة.

أ) بالنسبة لأي مجموعتين $X, Y$ إما أن $X$ مجموعة جزئية من $Y$ أو أن $Y$ مجموعة جزئية من $X$.

ب) $X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - (X \cap Z)$ لجميــع المجموعــات $X, Y, Z$.

ج) $(X - Y) \cap (Y - X) = \phi$ لجميع المجموعات $X, Y$.

د) $X - (Y \cup Z) = (X - Y) \cup Z$ لجميع المجموعات $X, Y, Z$.

هـ) $\overline{X - Y} = \overline{Y - X}$ لجميع المجموعات $X, Y$.

و) $\overline{X \cap Y} \subseteq X$ لجميع المجموعات $X, Y$.

ز) $(X \cap Y) \cup (Y - X) = X$ لجميع المجموعات $X, Y$.

ح) $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$ لجميــع المجموعــات $X, Y, Z$.

ط) $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$ لجميع المجموعات $X, Y$.

ي) $X \times (Y - Z) = (X \times Y) - (X \times Z)$ لجميــع المجموعــات $X, Y, Z$.

ك) $X - (Y \times Z) = (X - Y) \times (X - Z)$ لجميــع المجموعــات $X, Y, Z$.

ل) $X \cap (Y \times Z) = (X \cap Y) \times (X \cap Z)$ لجميــع المجموعــات $X, Y, Z$.

م) $X \times \phi = \phi$ لأي مجموعة $X$.

٢-١٣ اثبت أنه لأي مجموعة X: $\phi \subseteq X$

٢-١٤ لكل شرط من الشروط التالية اذكر العلاقة التي يجب أن تتحقق بين المجموعتين A, B.

أ) $A \cap B = A$ ب) $A \cup B = A$

ج) $\overline{A} \cap U = \phi$ د) $\overline{A \cap B} = \overline{B}$

٢-١٥ يُعَرَّف الفارق المتماثل / المتناظر (symmetric difference) بين مجموعتين A, B بأنه المجموعة

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

أ) نفرض أن $A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{2, 3, 4, 5\}$. أوجد $A \Delta B$.

ب) صِف بالكلمات (Describe in words) الفارق المتماثل بين المجموعتين A, B.

ج) نفرض أن U مجموعة شاملة. صِف كلا من:

$$A \Delta A,\ A \Delta \overline{A},\ U \Delta A,\ \phi \Delta A$$

د) اثبت صحة أو خطأ العبارة التالية:

إذا حققت المجموعات A, B, C العلاقة $A \Delta C = B \Delta C$ فإن $A = B$.

٢-١٦ اثبت أن

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

٢-١٧ أوجد صيغة للمقدار $|A \cup B \cup C|$ شبيهة بالصيغة المعطاة في السؤال السابق (٢-١٦). اثبت أن الصيغة التي حصلت عليها صالحة لجميع المجموعات A, B, C.

٢-١٨ نفرض أن C دائرة (circle) ، وأن D هي مجموعة جميع أقطار الدائرة C (all diameters of). ماذا تمثل $\cap D$ ؟

٢-١٩ نفرض أن P ترمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من 1. ونفرض أننا سنعرِّف

$$X_i = \{ik \mid k \geq 2, \quad k \in P\}$$

صِف $P - \bigcup_{i=2}^{\infty} X_i$

٢-٢٠ باستخدام الاستقراء (induction) اثبت أنه إذا كانت $X_1, X_2, \cdots, X_n, X$ مجموعات (sets)، فإن:

أ) $$X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup \cdots \cup (X \cap X_n).$$

ب) $$\overline{X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n} = \overline{X}_1 \cup \overline{X}_2 \cup \cdots \cup \overline{X}_n.$$

## ثانيا: المتتاليات / المتتابعات

٢-٢١ نفرض أن s متتابعة معرَّفة كما يلي

c, d, d, c, d, c

أ) أوجد $s_1$ ب) أوجد $s_4$

ج) اكتب s كسلسلة (string).

٢-٢٢ نفرض أن t متتابعة معرفة بالعلاقة

$$t_n = 2n - 1, \quad n \geq 1$$

أ) أوجد كلاً من

i) $t_3$ ii) $t_7$ iii) $t_{100}$ iv) $t_{2077}$

ب) أوجد كلاً من

i) $\sum_{i=1}^{3} t_i$ ii) $\sum_{i=3}^{7} t_i$

ج) أوجد كلاً من

i) $\prod_{i=1}^{3} t_i$ ii) $\prod_{i=3}^{6} t_i$

د) أوجد صيغة (formula) تمثل هذه المتتابعة كمتتابعة مؤشرها السفلي (lower index) يساوي 0.

هـ) هل t متزايدة (increasing) ؟

و) هل t متناقصة (decreasing) ؟

٢-٢٣ نفرض أن v هي المتتابعة

$$v_n = n! + 2, \quad n \geq 1$$

أ) أوجد كلاً من

i) $v_3$ ii) $v_4$

ب) أوجد كلاً من

i) $\sum_{i=1}^{4} v_i$ ii) $\sum_{i=3}^{3} v_i$

ج) هل v متزايدة ؟

د) هل v متناقصة ؟

٢-٢٤ نفرض أن a هي المتتابعة

$$a_n = n^2 - 3n + 3, \quad n \geq 1$$

أ) أوجد كلاً من

i) $\sum_{i=1}^{4} a_i$ ii) $\sum_{j=3}^{5} a_j$

iii) $\sum_{i=4}^{4} a_i$ iv) $\sum_{k=1}^{6} a_k$

ب) أوجد كلاً من

i) $\prod_{i=1}^{2} a_i$ ii) $\prod_{i=1}^{3} a_i$

iii) $\prod_{n=2}^{3} a_n$ iv) $\sum_{i=3}^{4} a_i$

ج) هل a متزايدة ؟

د) هل a متناقصة ؟

٢-٢٥ نفرض أن b هي المتتابعة

$$b_n = n(-1)^n$$

أ) أوجد كلاً من

i) $\sum_{i=1}^{4} b_i$ ii) $\sum_{i=1}^{10} b_i$

ب) أوجد صيغة للمتتابعة c المعرفة بالعلاقة

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

ج) أوجد صيغة للمتتابعة d المعرفة بالعلاقة

$$d_n = \prod_{i=1}^{n} b_i$$

د) هل b متزايدة ؟

هـ) هل b متناقصة ؟

٢-٢٦ نفرض أن Ω هي المتتابعة المعرفة بالعلاقة

$$\Omega_n = 3, \qquad \forall n$$

أ) أوجد كلاً من

i) $\sum_{i=1}^{3} \Omega_i$ ii) $\sum_{i=1}^{10} \Omega_i$

ب) أوجد صيغة للمتتابعة c المعرفة بالعلاقة

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} \Omega_i$$

ج) أوجد صيغة للمتتابعة d المعرفة بالعلاقة

$$d_n = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$$

د) هل $\Omega$ متزايدة ؟

هـ) هل $\Omega$ متناقصة ؟

٢-٢٧ نفرض أن $x$ هي المتتابعة المعرفة كما يلي:

$$x_1 = 2, \quad x_n = 3 + x_{n-1}, \quad n \geq 2$$

أ) أوجد كلاً من

i) $\sum_{i=1}^{3} x_i$ ii) $\sum_{i=1}^{10} x_i$

ب) أوجد صيغة للمتتابعة $c$ المعرفة بالعلاقة

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

ج) هل $x$ متزايدة ؟

د) هل $x$ متناقصة ؟

٢-٢٨ نفرض أن $w$ هي المتتابعة

$$w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \qquad n \geq 1$$

أ) أوجد كلاً من

i) $\sum_{i=1}^{3} w_i$ ii) $\sum_{i=1}^{10} w_i$

ب) أوجد صيغة للمتتابعة $c$ المعرفة بالعلاقة

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

ج) أوجد صيغة للمتتابعة $d$ المعرفة بالعلاقة

$$d_n = \prod_{i=1}^{n} w_i$$

د) هل $w$ متزايدة ؟

هـ) هل $w$ متناقصة ؟

٢-٢٩ نفرض أن $u$ هي المتتابعة المعرفة كما يلي:

$$u_1 = 3, \quad u_n = 3 + u_{n-1}, \quad n \ge 2$$

أوجد صيغة للمتتابعة $d$ المعرفة بالعلاقة

$$d_n = \prod_{i=1}^{n} u_i$$

٢-٣٠ نفرض أن $\{s_n\}$ معرفة بالقاعدة

$$s_n = 2n - 1, \quad n \ge 1$$

ونفرض أننا حصلنا على متتابعة جزئية (subsequence) من $s$ بأخذ الحدود (terms) التالية: الحد الأول ، الحد الثالث ، الحد الخامس ، ...

أ) اذكر الحدود السبعة الأولى في المتتابعة $s$.

ب) اذكر الحدود السبعة الأولى في المتتابعة الجزئية.

ج) أوجد صيغة للتعبير $n_k$ (expression) المذكور في تعريف المتتالية الجزئية (بعد مثال ٢-١٠).

د) أوجد صيغة للحد الذي مؤشره $k$ (*k* th term) في المتتابعة الجزئية.

٢-٣١ نفرض أن $\{t_n\}$ معرفة بالقاعدة

$$t_n = 2^n, \quad n \ge 1$$

ونفرض أننا حصلنا على متتابعة جزئية من $t$ بأخذ الحدود التالية: الأول ، والثاني ، والرابع ، والسابع ، والحادي عشر ، ... الخ.

أ) اذكر الحدود السبعة الأولى في المتتابعة $t$.

ب) اذكر الحدود السبعة الأولى في المتتابعة الجزئية.

ج) أوجد صيغة للتعبير $n_k$ المذكور في تعريف المتتالية الجزئية.

د) أوجد صيغة للحد الذي مؤشره $k$ (*k* th term) في المتتابعة الجزئية.

٢-٣٢ نفرض أن لدينا المتتاليتين $y, z$ المعرفتين كما يلي:

$$y_n = 2^n - 1, \quad z_n = n(n-1).$$

أوجد كلا مما يلي:

أ) $\left(\sum_{i=1}^{3} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3} z_i\right)$

ب) $\left(\sum_{i=1}^{5} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} z_i\right)$

ج) $\sum_{i=1}^{3} y_i z_i$

د) $\left(\sum_{i=3}^{4} y_i\right)\left(\prod_{i=2}^{4} z_i\right)$

**٢-٣٣ نفرض أن لدينا المتتالية r المعرفة بالعلاقة**

$$r_n = 3.2^n - 4.5^n, \qquad n \geq 0$$

**أ) أوجد**

i) $r_0$ ii) $r_1$ iii) $r_2$ iv) $r_3$

**ب) أوجد صيغة للحد** $r_p$.

**ج) أوجد صيغة للحد** $r_{n-1}$.

**د) أوجد صيغة للحد** $r_{n-2}$.

**هـ) اثبت أن** $\{r_n\}$ **تحقق العلاقة**

$$r_n = 7\, r_{n-1} - 10\, r_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

**٢-٣٤ نفرض أن z متتالية معرفة بالعلاقة**

$$z_n = (2+n)\, 3^n, \qquad n \geq 0$$

**أ) أوجد**

i) $z_0$ ii) $z_1$ iii) $z_2$ iv) $z_3$

**ب) أوجد صيغة للحد** $z_i$

**ج) أوجد صيغة للحد** $z_{n-1}$

**د) أوجد صيغة للحد** $z_{n-2}$

**هـ) اثبت أن** $\{z_n\}$ **تحقق العلاقة**

$$z_n = 6\, z_{n-1} - 9\, z_{n-2}\ , \qquad n \ge 2$$

**٣٥-٢ أوجد** $b_i,\quad i = 1,2,\cdots,6$

**حيث**

$$b_n = 2[1 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)] + \frac{(n-1)n}{2}$$

**٣٦-٢ أعد كتابة المجموع**

$$\sum_{i=1}^{n} i^2\, r^{n-i}$$

**مستخدما المؤشر** k (index) **بدلا من** i **، حيث** i = k+1

**٣٧-٢ أعد كتابة المجموع**

$$\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}\, C_{n-k}$$

**مستخدما المؤشر** i **بدلا من** k **، حيث** k = i+1

**٣٨-٢ نفرض أن** a, b **متتاليتان ، ونفرض أن**

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$$

**اثبت أن**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1}$$

[**ملاحظة: هذه المعادلة والتي تعرف باسم صيغة التجميع بالتجزئ (جزءا جزءا)** (summation-by-parts formula) **هي المقابل / النظير في الرياضيات المتقطعة** (discrete analog) **لصيغة التكامل بالتجزئ في حساب التفاضل / الاشتقاق** (calculus)].

**٣٩-٢ أحيانا نقوم بتعميم اصطلاح المتتالية** (notion of sequence) **المعرَّف في هذا الفصل بالسماح باستخدام مؤشرات أكثر عمومية** (allowing more (general indexing). نفرض أن $\{a_{ij}\}$ متتالية مؤشرة بعددين صحيحين موجبين. اثبت أن

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{ij}\right)$$

٢–٤٠ باستخدام سلاسل الرموز (strings)

$$\alpha = baab, \qquad \beta = caaba, \qquad \gamma = bbab$$

احسب (compute) كلا من الكميات (quantities) التالية:

أ) $\alpha\beta$ ب) $\beta\alpha$

ج) $\alpha\alpha$ د) $\beta\beta$

هـ) $|\alpha\beta|$ و) $|\beta\alpha|$

ز) $|\alpha\alpha|$ ح) $|\beta\beta|$

ط) $\alpha\lambda$ ي) $\lambda\beta$

ك) $\alpha\beta\gamma$ ل) $\beta\beta\gamma\alpha$

٢–٤١ نفرض أن $X = \{0, 1\}$.

أ) اذكر جميع السلاسل (strings) على X التي طولها 2.

ب) اذكر جميع السلاسل على X التي طولها 2 أو أقل.

ج) اذكر جميع السلاسل على X التي طولها 3.

د) اذكر جميع السلاسل على X التي طولها 3 أو أقل.

٢–٤٢ يقال لسلسلة s (string) إنها سلسلة جزئية (substring) من سلسلة t إذا وُجدت سلسلتان u, v بحيث أن t = u s v.

أ) أوجد جميع السلاسل الجزئية من السلسلة babc.

ب) أوجد جميع السلاسل الجزئية من السلسلة aabaabb.

**٢-٤٣ نفرض أن L هي مجموعة جميع السلاسل – بما في ذلك السلسلة الخاوية (null string) – التي يمكن تكوينها / تركيبها (can be constructed) بتطبيق متكرر (repeated application) للقاعدتين التاليتين:**

$$\text{if} \quad \alpha \in L, \text{ then} \quad a\alpha b \in L \quad \& \quad b\alpha a \in L \qquad \text{(i)}$$

$$\text{if} \quad \alpha \in L \;\&\; \beta \in L, \quad \text{then} \quad \alpha\beta \in L \qquad \text{(ii)}$$

**فمثلا:**

1) $\alpha \equiv \lambda \in L \quad \Rightarrow \quad a\alpha b \equiv ab \in L$ [بتطبيق (i)]

2) $\lambda \in L \quad \Rightarrow \quad ba \in L$ [بتطبيق (i)]

3) $\alpha \equiv ab \in L \Rightarrow a\alpha b \equiv aabb \in L$ [بتطبيق (i)]

4) $\alpha \equiv aabb \in L \quad \& \quad \beta \equiv ba \in L \quad \Rightarrow$

$\alpha\beta \equiv aabbba \in L$ [بتطبيق (ii)]

أ) **اثبت أن** $aaabbb \in L$

ب) **اثبت أن** $baabab \in L$

ج) **اثبت أن** $aab \notin L$

د) **اثبت أنه إذا كان** $\alpha \in L$ **فإن** $\alpha$ **تحتوي على عددين متساويين من الرمزين** a, b. (**إرشاد: استخدم الاستقراء القوي على طول** $\alpha$).

**٢-٤٤ نفرض أن** a **هي المتتالية المعرفة بالعلاقة** $a_n = 2n + 2$. **أوجد**

أ) $a_6$ ب) $\sum_{i=1}^{3} a_i$ ج) $\prod_{i=1}^{3} a_i$

د) **صيغة** (formula) **للمتتالية الجزئية التي نحصل عليها من المتتالية** a **باختيار حد وترك آخر مبتدئين بالحد الأول.**

**٢-٤٥ أعد كتابة المجموع** $\sum_{i=1}^{n} (n-i)\, r^i$ **مع وضع المؤشر** k **بدلا من المؤشر** i **، حيث** i = k+2.

**٢-٤٦ نفرض**

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 - i^2$$

أ) **أوجد كلا من** $b_5, b_{10}$.

ب) **أوجد صيغة لـ** $b_n$.

ج) **هل** b **متزايدة ؟**

د) **هل** b **متناقصة ؟**

**٢-٤٧ نفرض أن** $\alpha = ccddc, \quad \beta = c^3d^2$. **أوجد**

أ) $\alpha\beta$ ب) $\beta\alpha$ ج) $|\alpha|$ د) $|\alpha\alpha\beta\alpha|$

## ثالثا: العلاقات

**٢-٤٨ اكتب كلا من العلاقات التالية كمجموعة من الأزواج المرتبة:**

أ)

| | |
|---|---|
| plane | 8840 |
| tank | 9921 |
| bomb | 452 |
| rocket | 2207 |

ب)

| | |
|---|---|
| 3 | a |
| 1 | b |
| 4 | b |
| 1 | c |

ج)

| | |
|---|---|
| Math | Khadeeja |
| Physics | Maryam |
| Econ | Aisha |

د)

| | |
|---|---|
| a | a |
| b | b |

**٢-٤٩ اكتب كلا من العلاقات التالية في صورة جدول:**

أ) R = {(a, 6), (b, 2), (a, 1), (c, 1)}

ب) R = {(Ahmed, Computer Sc.), (Aly, History), (Othman, Math), (Aly, Poly Sci)}

ج) **العلاقة** R **على** {1, 2, 3, 4} **المعرفة بأن**

$$(x, y) \in R \quad \text{if} \quad x^2 \geq y$$

٢-٥٠ **ارسم ثنائي بيان (digraph) كل من العلاقات التالية:**

أ) **علاقة السؤال ٢-٤٨-د) على** $\{a, b, c\}$.

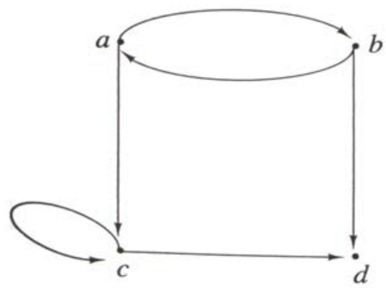
ب) **العلاقة** $R = \{(1,2), (2,1), (3,3), (1,1), (2,2)\}$ **على** $X = \{1,2,3\}$

ج) **العلاقة** $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4,1)\}$ **على** $\{1,2,3,4\}$.

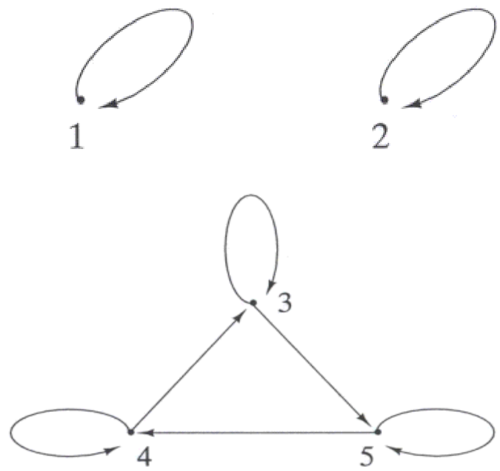
د) **العلاقة المعطاة في السؤال ٢-٤٩-ج).**

٢-٥١ **اكتب كلا من العلاقات التالية كمجموعة من الأزواج المرتبة:**

أ)

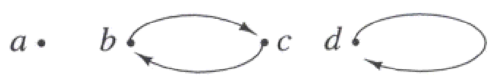



ب)




ج)


د)



٢-٥٢ بالنسبة للعلاقة المعرفة في السؤال ٢-٤٨-أ):

أ) اكتب مجال (domain) ومدى (range) العلاقة.

ب) اكتب معكوس (inverse) العلاقة كمجموعة من الأزواج المرتبة.

٢-٥٣ نفرض أن R علاقة على المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ معرفة بالقاعدة:

$$(x, y) \in R \quad \text{if} \quad 3 \text{ divides} \quad x - y$$

أي أن $(x, y) \in R$ إذا كانت 3 تَقْسِم x-y.

أ) اذكر عناصر R.

ب) اذكر عناصر $R^{-1}$.

ج) أوجد مجال R.

د) أوجد مدى R.

هـ) أوجد مجال $R^{-1}$.

و) أوجد مدى $R^{-1}$.

٢-٥٤ أعد حل السؤال ٢-٥٣) بالنسبة للعلاقة R على المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ والمعرفة بالقاعدة:

$$(x, y) \in R \quad \text{if} \quad x + y \le 6$$

٢-٥٥ أعد حل السؤال ٢-٥٣) بالنسبة للعلاقة R على المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ والمعرفة بالقاعدة:

$$(x, y) \in R \quad \text{if} \quad x = y - 1$$

٢-٥٦ بالنسبة للعلاقة المعرفة في السؤال ٢-٥٤):

هل العلاقة انعكاسية ، متناظرة ، قطرية التناظر ، متعدية ، ترتيب جزئي ؟

٢-٥٧ أعد حل السؤال ٢-٥٦) بالنسبة للعلاقة المعرفة في السؤال ٢-٥٥.

٢-٥٨ لكل علاقة من العلاقات التالية المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة اذكر ما إذا كانت العلاقة: انعكاسية ، متناظرة ، قطرية التناظر ، متعدية ، ترتيبا جزئيا.

أ) $(x,y) \in R \quad \text{if} \quad x = y^2$

ب) $(x,y) \in R \quad \text{if} \quad x > y$

ج) $(x,y) \in R \quad \text{if} \quad x \geq y$

د) $(x,y) \in R \quad \text{if} \quad x = y$

هـ) $(x,y) \in R \quad \text{if} \quad 3 \text{ divides } \quad x - y$

**٢-٥٩ نفرض أن X مجموعة غير خالية ، ونُعرِّف علاقة على P(X) (مجموعة قوى X) كما يلي:**

$$(A,B) \in R \quad \text{if} \quad A \subseteq B$$

**هل هذه العلاقة انعكاسية ، متناظرة ، قطرية التناظر ، متعدية ، ترتيب جزئي؟**

**٢-٦٠ نفرض أن X هي مجموعة جميع السلاسل رباعية الأرقام الثنائية** (all four-bit strings) **[مثل السلاسل:** 0011, 0101, 1000**]. نُعَرِّف علاقة R على X كما يلي:**

$s_1 R s_2$ **: إذا كانت سلسلة جزئية ما من** $s_1$ (some substring of) **طولها** 2 **مساوية لسلسلة جزئية ما من** $s_2$ **طولها** 2**. فمثلا:**

$0111 \; R \; 1010$ **لأن كلا من** 0111 **و** 1010 **تحتوي على** 01.

$1111 \; \not R \; 1010$ **لأن** 1111 **و**1010 **لا يشتركان في سلسلة جزئية طولها** 2.

**هل هذه العلاقة R انعكاسية ، متناظرة ، قطرية التناظر ، ترتيب جزئي ؟**

**٢-٦١ نفرض أن** $R_i$ **ترتيب جزئي على** $X_i$ **حيث** $i = 1, 2$**. اثبت أن R ترتيب جزئي على** $X_1 \times X_2$ **إذا عرفنا**

$$(x_1, x_2) R (x_1', x_2') \quad \text{if} \quad x_1 R_1 x_1' \;\&\; x_2 R_2 x_2'$$

**٢-٦٢ نفرض أن** $R_1, R_2$ **هما العلاقتان المعرفتان على** $\{1,2,3,4\}$ **كما يلي:**

$$R_1 = \{(1,1), (1,2), (3,4), (4,2)\}$$

$$R_2 = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,4), (2,2)\}$$

**اذكر عناصر كل من** $R_1 \circ R_2 \quad \& \quad R_2 \circ R_1$

**٢-٦٣ اذكر مثالا لكل من العلاقات التالية على** $\{1, 2, 3, 4\}$:

**أ) علاقة انعكاسية ، ومتناظرة ، وغير متعدية.**

**ب) علاقة انعكاسية ، وغير متناظرة ، وغير متعدية.**

**ج) علاقة انعكاسية ، وقطرية التناظر ،وغير متعدية.**

د) علاقة غير انعكاسية ، ومتناظرة ، وغير قطرية التناظر ، ومتعدية.

هـ) علاقة غير انعكاسية ، وغير متناظرة ، ومتعدية.

٢-٦٤ نفرض أن $R, S$ علاقتان على $X$. اذكر ما إذا كانت كل من العبارات التالية صادقة $T$ (true) أم خاطئة $F$ (false). وإن كانت العبارة خاطئة اعط مثالا مناقضا.

أ) إذا كانت كل من $R, S$ علاقة متعدية فإن $R \cup S$ علاقة متعدية.

ب) إذا كانت كل من $R, S$ علاقة متعدية فإن $R \cap S$ علاقة متعدية.

ج) إذا كانت كل من $R, S$ علاقة متعدية فإن $R \circ S$ علاقة متعدية.

د) إذا كانت $R$ علاقة متعدية فإن $R^{-1}$ علاقة متعدية.

هـ) إذا كانت كل من $R, S$ علاقة انعكاسية فإن $R \cup S$ علاقة انعكاسية.

و) إذا كانت كل من $R, S$ علاقة انعكاسية فإن $R \cap S$ علاقة انعكاسية.

ز) إذا كانت كل من $R, S$ علاقة انعكاسية فإن $R \circ S$ علاقة انعكاسية.

ح) إذا كانت $R$ علاقة انعكاسية فإن $R^{-1}$ علاقة انعكاسية.

ط) إذا كانت كل من $R, S$ علاقة متناظرة فإن $R \cup S$ علاقة متناظرة.

ي) إذا كانت كل من $R, S$ علاقة متناظرة فإن $R \cap S$ علاقة متناظرة.

ك) إذا كانت كل من $R, S$ علاقة متناظرة فإن $R \circ S$ علاقة متناظرة.

ل) إذا كانت $R$ علاقة متناظرة فإن $R^{-1}$ علاقة متناظرة.

م) إذا كانت كل من $R, S$ علاقة قطرية التناظر فإن $R \cup S$ علاقة قطرية التناظر.

ن) إذا كانت كل من $R, S$ علاقة قطرية التناظر فإن $R \cap S$ علاقة قطرية التناظر.

س) إذا كانت كل من $R, S$ علاقة قطرية التناظر فإن $R \circ S$ علاقة قطرية التناظر.

ع) إذا كانت $R$ علاقة قطرية التناظر فإن $R^{-1}$ علاقة قطرية التناظر.

**٢–٦٥ لكل علاقة من العلاقات التالية المعرفة على تجمع (collection) جميع المجموعات الجزئية غير الخاوية (nonempty subsets) من الأعداد الحقيقية (real numbers) ، اذكر ما إذا كانت العلاقة انعكاسية ، متناظرة ، قطرية التناظر ، متعدية ، ترتيبا جزئيا.**

أ) $(A,B) \in R \text{ if } \forall \in > 0 \;\exists\; a \in A \,\&\, b \in B \ni |a-b| < \in$

ب) $(A,B) \in R \text{ if } \forall a \in A \,\&\, \in > 0 \,\exists\, b \in B \ni |a-b| < \in$

ج) $(A,B) \in R \text{ if } \forall a \in A, b \in B, \& \in > 0 \,\exists\, a' \in A \text{ and } b' \in B$
$\ni |a-b'| < \in \& |a'-b| < \in$

**٢–٦٦ ما هو الخطأ في الحجة التالية التي يُفترض أن تثبت أن أي علاقة R على X إن كانت متناظرة ومتعدية فهي أيضا انعكاسية ؟**

**نفرض $x \in X$ . باستخدام التناظر نجد أن كلا من $(x, y)$ , $(y, x)$ ينتمي إلى R. وحيث أن $(x, y), (y, x) \in R$ فباستخدام التعدي نجد أن $(x, x) \in R$ . أي أن R علاقة انعكاسية.**

**٢–٦٧ اذكر ما إذا كانت العلاقة المعرفة فيما يلي على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة انعكاسية ، متناظرة ، قطرية التناظر ، متعدية ، ترتيبا جزئيا.**

أ) $(x,y) \in R \quad \text{if} \quad 2 \quad \text{divides} \quad x+y$

ب) $(x,y) \in R \quad \text{if} \quad 3 \quad \text{divides} \quad x+y$

**٢–٦٨ اعط مثالا لعلاقة على المجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$ بحيث تكون العلاقة انعكاسية ، وغير قطرية التناظر ، وغير متعدية.**

**٢–٦٩ نفرض أن R علاقة متناظرة ومتعدية وغير انعكاسية وذلك على المجموعة X حيث $|x| \geq 2$ . ونفرض أن $\overline{R}$ علاقة معرفة على X هكذا:**

$$\overline{R} = X \times X - R$$

**اذكر أي العبارات التالية صحيحة T وأيها خاطئة F ، وبالنسبة للعبارة الخاطئة اعط مثالا مناقضا.**

أ) $\overline{R}$ **انعكاسية.** ب) $\overline{R}$ **متناظرة.**

ج) $\overline{R}$ **غير قطرية التناظر.** د) $\overline{R}$ **متعدية.**

## رابعا: علاقات التكافؤ

٢-٧٠ حَدِّد ما إذا كانت كل علاقة من العلاقات التالية علاقة تكافؤ على المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ أم لا. وإن كانت العلاقة علاقة تكافؤ فاذكر طبقات التكافؤ. وفي الأجزاء هـ) ← ح) من السؤال اعتبر أن $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

أ) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1)\}$

ب) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 3)\}$

ج) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

د) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), (1, 3), (3, 1)\}$

هـ) $\{(x, y) \mid 1 \le x \le 5, 1 \le y \le 5\}$

و) $\{(x, y) \mid 4 \text{ divides } x - y\}$

ز) $\{(x, y) \mid 3 \text{ divides } x + y\}$

ح) $\{(x, y) \mid x \text{ divides } 2 - y\}$

٢-٧١ حَدِّد ما إذا كانت كل علاقة من العلاقات التالية علاقة تكافؤ على مجموعة جميع الناس (set of all people) أم لا.

أ) {(x, y) | x and y are the same height}

ب) {(x, y) | x and y have, at some time, lived in the same country}

ج) {(x, y) | x and y have the same first name}

د) {(x, y) | x is taller than y}

هـ) {(x, y) | x and y have the same parents}

و) {(x, y) | x and y have the same hair color}

٢-٧٢ اذكر عناصر علاقة التكافؤ (members of the equiv. relation) على $\{1, 2, 3, 4\}$ المعرفة (كما في نظرية ٢-٣) بالتجزيء المعطَى (given partition). أوجد كذلك طبقات التكافؤ [1], [2], [3], [4].

أ) $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ ب) $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$

ج) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ د) $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$

هـ) $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$ و) $\{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$

٢-٧٣ نفرض أن $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad Y = \{3, 4\}, \quad C = \{1, 3\}$ ونُعَرِّف العلاقة $R$ على $P(X)$ – وهي مجموعة جميع المجموعات الجزئية من $X$ – كما يلي:

$$ARB \text{ iff } A \cup Y = B \cup Y$$

أ) اثبت أن $R$ علاقة تكافؤ.

ب) اذكر عناصر $[C]$ ، حيث $[C]$ هي طبقة التكافؤ التي تحتوي على $C$.

ج) كم عدد طبقات التكافؤ المختلفة ؟

٢-٧٤ نفرض أن

X = {Palestine, Egypt, Iraq, Syria, Algeria, Bosnia}

عَرِّف علاقة $R$ على $X$ كما يلي:

$xRy$ إذا كان $x, y$ يقعان في القارة نفسها ، أي:

xRy if x and y are in the same continent

أ) اثبت أن $R$ علاقة تكافؤ.

ب) اذكر طبقات تكافؤ $X$ (equivalence classes of $X$).

٢-٧٥ اثبت أنه إذا كانت $R$ علاقة تكافؤ على $X$ فإن

مدى $R$ = مجال $R$ = $X$ ، أي أن

domain $R$ = Range $R$ = $X$

٢-٧٦ إذا احتوت علاقة تكافؤ على طبقة تكافؤ واحدة فقط ، فماذا يجب أن يكون شكل هذه العلاقة ؟

٢-٧٧ إذا كانت $R$ علاقة تكافؤ على مجموعة $X$ ، وكان $|R| = |X|$ ، فماذا يجب أن يكون شكل هذه العلاقة ؟

٢-٧٨ اعط مثالا لعلاقة تكافؤ على $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ تحتوي بالضبط على أربع طبقات تكافؤ ، وذلك عن طريق ذِكر أزواج مرتبة.

٢-٧٩ كم عدد علاقات التكافؤ الموجودة على المجموعة $\{1, 2, 3\}$ ؟

٢-٨٠ نفرض أن $X = \{1, 2, ..., 10\}$. عَرِّف علاقة R على $X \times X$ كما يلي:

$$(a, b)\ R\ (c, d) \ \text{ if } \ a+d = b+c$$

أ) اثبت أن R علاقة تكافؤ على $X \times X$.

ب) اذكر عنصرا واحدا من كل طبقة من طبقات تكافؤ $X \times X$.

٢-٨١ نفرض أن $X = \{1, 2, ..., 10\}$. عَرِّف علاقة R على $X \times X$ كما يلي:

$$(a, b)\ R\ (c, d) \ \text{ if } \ ad = bc$$

أ) اثبت أن R علاقة تكافؤ على $X \times X$.

ب) اذكر عنصرا واحدا من كل طبقة من طبقات تكافؤ $X \times X$.

ج) صِف العلاقة R بالكلمات والمصطلحات المعتادة.

٢-٨٢ نفرض أن R علاقة انعكاسية ومتعدية على X. اثبت أن $R \cap R^{-1}$ علاقة تكافؤ على X.

٢-٨٣ نفرض أن $R_1, R_2$ علاقتا تكافؤ على X.

أ) اثبت أن $R_1 \cap R_2$ علاقة تكافؤ على X.

ب) صف طبقات تكافؤ $R_1 \cap R_2$ بدلالة كل من طبقات تكافؤ $R_1$ وطبقات تكافؤ $R_2$.

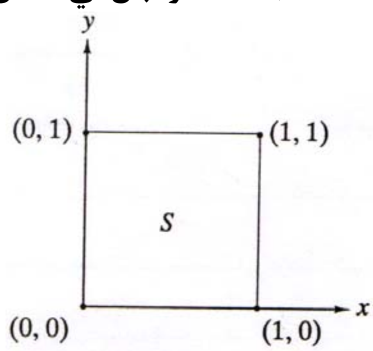
٢-٨٤ نفرض أن S تجميع (collection) لمجموعات جزئية من مجموعة X وأن $X = \cup S$. [ لا يُفترض أن العائلة S (family) متباعدة زوجا زوجا (pairwise disjoint) ]. عَرِّف العلاقة R كما يلي:

xRy تعني أنه توجد مجموعة $T \in S$ بحيث أن x, y ينتميان معا إلى T ، أي أن

$$xRy \ \text{ if for some set } \ T \in S \ , \text{ both } x \ \& \ y \text{ are in } T$$

هل R بالضرورة (necessarily) انعكاسية ، متناظرة ، متعدية ؟

٢-٨٥ نفرض أن S تمثل مربع الوحدة (unit square) شاملا ما بداخله (including the interior) ، كما هو مبين في الشكل التالي:




ونفرض أننا عَرَّفنا علاقة R على S كما يلي:

$$(x,y)\,R\,(x',y') \text{ if } (x=x' \,\&\, y=y') \text{ or}$$
$$(y=y', x=0 \,\&\, x'=1) \text{ or } (y=y', x=1 \,\&\, x'=0)$$

أ) اثبت أن R علاقة تكافؤ على S.

ب) إذا فرضنا أن النقاط التي تقع في طبقة التكافؤ نفسها (same equivalence class) قد تم لصقها بعضها مع بعض (glued together) فما هو وصف الشكل الناتج؟

٢-٨٦ نفرض أن S تمثل مربع الوحدة بما في ذلك داخله ، كما في الشكل السابق. ونفرض أننا سنعرف علاقة $R'$ على S كما يلي:

$$(x,y)R'(x',y') \text{ if } (x=x' \,\&\, y=y') \text{ or } (y=y', x=0 \,\&\, x'=1) \text{ or}$$
$$(y=y', x=1 \,\&\, x'=0) \text{ or } (x=x', y=0 \,\&\, y'=1) \text{ or}$$
$$(x=x', y=1 \,\&\, y'=0)$$

ونفرض أن

$$R = R' \cup \{((0,0),(1,1)), ((0,1),(1,0)), ((1,0),(0,1)), ((1,1),(0,0))\}$$

اثبت أن R علاقة تكافؤ على S.

٢-٨٧ نفرض أن R علاقة على مجموعة X. ونفرض أننا سنعرِّف

$$\rho(R) = R \cup \{(x,x) \mid x \in X\}$$

$$\sigma(R) = R \cup R^{-1}$$

$$R^n = R \circ R \circ R \circ \cdots \circ R \quad (nR's)$$

$$\tau(R) = \cup\{R^n \mid n = 1, 2, \cdots\}.$$

**العلاقة $\tau(R)$ يطلق عليها "غُلاقة متعدية / انغلاق متعد للعلاقة R"** (transitive closure of R).

أ) **بالنسبة للعلاقتين $R_1, R_2$ المعرفتين في السؤال ٢-٦٢) أوجد كلا من:**

$$\rho(R_i), \sigma(R_i), \tau(R_i), \tau(\sigma(\rho(R_i))), \quad i = 1, 2$$

ب) **اثبت أن $\rho(R)$ انعكاسية.**

ج) **اثبت أن $\sigma(R)$ متناظرة.**

د) **اثبت أن $\tau(R)$ متعدية.**

هـ) **اثبت أن R تكون علاقة متعدية إذا وفقط إذا كانت** $\tau(R) = R$ .

و) **لكل عبارة من العبارات التالية اذكر ما إذا كانت العبارة صادقة (true) [إن كانت العبارة صحيحة بالنسبة لأي علاقتين $R_1, R_2$ على أي مجموعة اختيارية X] أو خاطئة (false) [ما عدا ذلك]. وفي حالة ما إذا كانت العبارة خاطئة اعط مثالا مناقضا.**

(i $\rho(R_1 \cup R_2) = \rho(R_1) \cup \rho(R_2)$

(ii $\sigma(R_1 \cap R_2) = \sigma(R_1) \cap \sigma(R_2)$

(iii $\tau(R_1 \cup R_2) = \tau(R_1) \cup \tau(R_2)$

(iv $\tau(R_1 \cap R_2) = \tau(R_1) \cap \tau(R_2)$

(v $\sigma(\tau(R_1)) = \tau(\sigma(R_1))$

(vi $\sigma(\rho(R_1)) = \rho(\sigma(R_1))$

(vii $\rho(\tau(R_1)) = \tau(\rho(R_1))$

٢-٨٨ هل العلاقة

$$\{(1,1), (1,2), (2,2), (4,4), (2,1), (3,3)\}$$

علاقة تكافؤ على المجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$ ؟ ولماذا ؟

٢-٨٩ إذا علمت أن العلاقة

$$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$$

هي علاقة تكافؤ على المجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$

أ) أوجد $[3]$ : طبقة التكافؤ التي تحتوي على 3.

ب) كم عدد طبقات التكافؤ المختلفة (distinct) ؟

٢-٩٠ أوجد علاقة التكافؤ (كمجموعة أزواج مرتبة) على المجموعة $\{a, b, c, d, e\}$ بحيث تكون طبقات التكافؤ المقابلة هي

$$\{a\}, \quad \{b, d, e\}, \quad \{c\}$$

٢-٩١ نفرض أن R هي العلاقة المعرفة على مجموعة السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية (set of eight-bit strings) كما يلي:

$s_1 R s_2$ إذا كان $s_1, s_2$ لهما العدد نفسه من الأصفار

[$s_1 R s_2$ if $s_1$ and $s_2$ have the same number of zeros]

أ) اثبت أن R علاقة تكافؤ.

ب) كم عدد طبقات التكافؤ المقابلة ؟

ج) اذكر عنصرا واحدا من كل طبقة تكافؤ.

٢-٩٢ حَدِّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صحيحة (true) أم خاطئة (false).

أ) لا يمكن لأي علاقة أن تكون ترتيبا جزئيا وعلاقة تكافؤ في الوقت نفسه.

ب) إذا كانت العلاقة R معرفة كما يلي:

$xRy$ إذا كانت 2 تَقْسِم $x + y$

فإن R علاقة تكافؤ على الأعداد الصحيحة الموجبة.

## خامسا : الدوال

٢-٩٣ بالنسبة لكل علاقة من العلاقات التالية اذكر ما إذا كانت العلاقة دالة من $X = \{1, 2, 3, 4\}$ إلى $Y = \{a, b, c, d\}$. وإن كانت العلاقة دالة فأوجد مجالها ومداها وارسم مخططها السهمي وحدد ما إذا كانت واحدا لواحد أو غامرة. وإن كانت كليهما (واحدا لواحد وغامرة) فَصِف (describe) الدالة العكسية كمجموعة أزواج مرتبة وارسم مخططها السهمي واذكر مجالها ومداها.

أ) $\{(1, a), (2, a), (3, c), (4, b)\}$

ب) $\{(1, c), (2, a), (3, b), (4, c), (2, d)\}$

ج) $\{(1, c), (2, d), (3, a), (4, b)\}$

د) $\{(1, d), (2, d), (4, a)\}$

هـ) $\{(1, b), (2, b), (3, b), (4, b)\}$

٢-٩٤ ارسم بيان (graph) كل من الدوال التالية:

أ) $f(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$

ب) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$

ج) $f(x) = \lceil x^2 \rceil$

د) $f(x) = \lfloor x^2 - x \rfloor$

٢-٩٥ بالنسبة لكل دالة من الدوال التالية حَدِّد ما إذا كانت الدالة واحدا لواحد أم لا. مجال أي دالة هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية. وإن لم تكن الدالة واحدا لواحد فاعط مثالا مناقضا بِذِكر عددين مختلفين a, b بحيث أن $f(a) = f(b)$. وأيضا حَدِّد ما إذا كانت الدالة غامرة على مجموعة جميع الأعداد الحقيقية أم لا. وإن لم تكن غامرة فاعط مثالا مناقضا بذكر عدد y بحيث أن $f(x) \neq y$ لجميع الأعداد الحقيقية x.

أ) $f(x) = 6x - 9$ ب) $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$

ج) $f(x) = \sin x$ د) $f(x) = 2x^3 - 4$

هـ) $f(x) = 3^x - 2$ و) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

٢–٩٦ أ) اعط مثالا لدالة واحد لواحد وليست غامرة.

ب) اعط مثالا لدالة غامرة وليست واحدا لواحد.

ج) اعط مثالا لدالة ليست واحدا لواحد وليست غامرة.

٢–٩٧ الدوال التالية جميعها واحد لواحد. أوجد معكوس كل من هذه الدوال.

أ) $f(x) = 4x + 2$ ب) $f(x) = 3^x$

ج) $f(x) = 3\log_2 x$ د) $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$

هـ) $f(x) = 4x^3 - 5$ و) $f(x) = 6 + 2^{7x-1}$

٢–٩٨ نفرض أن

$$g = \{(1, b), (2, c), (3, a)\}$$

دالة من $X = \{1, 2, 3\}$ إلى $Y = \{a, b, c, d\}$ وأن

$$f = \{(a, x), (b, x), (c, z), (d, w)\}$$

دالة من $Y$ إلى $Z = \{w, x, y, z\}$

اكتب $f \circ g$ كمجموعة أزواج مرتبة ، وارسم مخطط $f \circ g$ السهمي.

٢–٩٩ أ) نفرض أن كلا من $f, g$ دالة من الأعداد الصحيحة الموجبة إلى الأعداد الصحيحة الموجبة ، حيث الدالتان معرفتان بالمعادلتين

$$f(n) = 2n + 1, \qquad g(n) = 3n - 1$$

أوجد كلا من دوال التركيب التالية:

$$f \circ f, \quad g \circ g, \quad f \circ g, \quad g \circ f$$

ب) نفرض أن $f, g$ دالتان من الأعداد الصحيحة الموجبة إلى الأعداد الصحيحة الموجبة معرفتان بالمعادلتين

$$f(n) = n^2, \qquad g(n) = 2^n$$

أوجد الدوال التركيبية

$$f \circ f, \quad g \circ g, \quad f \circ g, \quad g \circ f$$

ج) نفرض أن $f, g$ دالتان من الأعداد الحقيقية الموجبة إلى الأعداد الحقيقية الموجبة معرفتان بالمعادلتين

$$f(x) = \lfloor 2x \rfloor, \qquad g(x) = x^2$$

أوجد الدوال التركيبية

$$f \circ f, \quad g \circ g, \quad f \circ g, \quad g \circ f$$

٢–١٠٠ حَلِّل / فَرِّق (decompose) كلا من الدوال التالية إلى دوال أبسط (simpler functions) كما في مثال ٢–٥٨.

أ) $f(x) = \log_2(x^2 + 2)$ ب) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}$

ج) $f(x) = \sin 2x$ د) $f(x) = 2\sin x$

هـ) $f(x) = (3 + \sin x)^4$ و) $f(x) = \dfrac{1}{(\cos 6x)^3}$

٢–١٠١ نفرض أن

$$f = \{(x, x^2) \mid x \in X\}$$

دالة من $X = \{-5, -4, \cdots, 4, 5\}$ إلى مجموعة الأعداد الصحيحة.

اكتب $f$ كمجموعة أزواج مرتبة ، وارسم مخطط $f$ السهمي.

هل $f$ واحد لواحد ؟ هل $f$ غامرة ؟

٢–١٠٢ كم عدد الدوال المتوافرة من $\{1, 2\}$ إلى $\{a, b\}$ ؟ وأيها دوال واحد لواحد ؟ وأيها دوال غامرة ؟

٢–١٠٣ نفرض أن

$$f = \{(a, b), (b, a), (c, b)\}$$

دالة من $X = \{a, b, c\}$ إلى $X$ .

أ) اكتب كلا من $f \circ f$ و $f \circ f \circ f$ كمجموعة أزواج مرتبة.

ب) نفرض أن

$$f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$$

هي تركيب f مع نفسها n طية (n-fold composition of f with itself). أوجد كلا من $f^9,\ f^{623}$

٢-١٠٤أ) نفرض أن f هي الدالة من $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ إلى X المعرفة بالمعادلة

$$f(x) = 4x \bmod 5$$

اكتب f كمجموعة أزواج مرتبة ، وارسم مخطط f السهمي. هل f واحد لواحد ؟ هل f غامرة ؟

ب) نفرض أن f هي الدالة من $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ إلى X المعرفة بالمعادلة

$$f(x) = 4x \bmod 6$$

اكتب f كمجموعة أزواج مرتبة ، وارسم مخطط f السهمي. هل f واحد لواحد ؟ هل f غامرة ؟

ج) نفرض أن m, n عددان صحيحان موجبان. ونفرض أن f هي الدالة من $X = \{0, 1, \cdots, m-1\}$ إلى X المعرفة بالمعادلة

$$f(x) = nx \bmod m$$

أوجد الشروط التي يجب أن تحققها m, n بحيث نضمن أن f واحد لواحد وغامرة.

٢-١٠٥ نفرض أن رقم الكتاب القياسي الدولي ISBN لكتاب ما هو: $1-089008-13-0$ . تحقق (verify) من صحة رمز التحقق (ISBN check character) لهذا الكتاب.

٢-١٠٦ الكود العام للمنتجات (UPC) (Universal Product Code)

- هو الكود / الشفرة المعتادة ذات المستقيمات (familiar bar code) التي تعرِّف المنتجات بحيث يمكن تقييم سعرها أوتوماتيكيا (automatically priced) عند منضدة دفع الحساب (checkout counter). وتتكون شفرة UPC من 12 رقم ، حيث:
- الرقم الأول يحدد نوع المنتوجة (مثلا 0: منتوجة بقالة معتادة ، 2: منتوجة تباع بالوزن ، 3: منتوجة طبية ، ... الخ)
- الأرقام الخمسة التالية تحدد الصانع (manufacturer).
- والخمسة أرقام التالية تعرِّف المنتوجة.
- والرقم الأخير هو رقم تحقق (check digit) يُحسب كما يلي:

i) نحسب أولا $s$ وهي تساوي:

$$s = 3t + u$$

حيث $t$ هي مجموع أرقام الكود فردية الترتيب (الأول + الثالث + الخامس + ... ) و $u$ هي مجموع أرقام الكود زوجية الترتيب (الثاني + الرابع + السادس + ... ) ما عدا رقم التحقق.

ii) ثم نحسب رقم التحقق $c$ الذي يقع بين 9 , 0 احتوائيا والذي يحقق العلاقة

$$(c + s) \bmod 10 = 0$$

مثلا بالنسبة للكود 0-54400-00800-5

$$s = 3(0+4+0+0+8+0) + (5+4+0+0+0) = 45$$

$$(c + 45) \bmod 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 5$$

أوجد رقم التحقق للكود UPC الذي أرقامه الأحد عشر الأولى هي:
3-41280-21414

٢-١٠٧ لكل دالة من دوال البعثرة التالية وَضِّح كيف سيتم إدخال (inserting) البيانات – بالترتيب المذكور – في خلايا فارغة ابتداءً (initially empty cells) ، وذلك باتباع طريقة فك التضارب المشروحة في مثال ٢-٤٦.

أ) الدالة: $h(x) = x \bmod 11$

الخلايا: مرقمة $0 \rightarrow 10$ cells indexed

**البيانات:** data: 53, 13, 281, 743, 377, 20, 10, 796

ب) **الدالة:** $h(x) = x \bmod 17$

**الخلايا: مرقمة** $0 \to 16$

**البيانات:** 714, 631, 26, 373, 775, 906, 509, 2033, 42, 4, 136, 1028

ج) **الدالة:** $h(x) = x^2 \bmod 11$

**الخلايا والبيانات كما هي في أ).**

د) **الدالة:** $h(x) = (x^2 + x) \bmod 17$

**الخلايا والبيانات كما هي في ب).**

**٢-١٠٨أ) نفرض أننا سنقوم بتخزين (storing) واسترجاع (retrieving) البيانات بطريقة فك التضارب المشروحة في مثال ٢-٤٦). هل ستنشأ أي مشكلة إذا قمنا بحذف (deleting) أي بيانات ؟ وَضِّح إجابتك.**

**ب) نفرض أننا سنقوم بتخزين البيانات بطريقة مثال ٢-٤٦) ، وأننا لن نقوم بتخزين أكثر من 10 وحدات (units) من البيانات. هل ستنشأ أي مشكلة حين استرجاع البيانات إذا أوقفنا البحث (searching) حين تقابلنا خلية فارغة ؟ وَضِّح إجابتك.**

**٢-١٠٩ نفرض أن g دالة من X إلى Y ، وأن f دالة من Y إلى Z. بالنسبة لكل عبارة من العبارات التالية اذكر ما إذا كانت العبارة صادقة (true) أم خاطئة (false). وإن كانت العبارة خاطئة اعط مثالا مناقضا.**

أ) **إذا كانت f واحدا لواحد فإن** $f \circ g$ **واحد لواحد.**

ب) **إذا كانت كل من f, g غامرة فإن** $f \circ g$ **غامرة.**

ج) إذا كانت كل من $f, g$ واحدا لواحد وغامرة فإن $f \circ g$ واحد لواحد وغامرة.

د) إذا كانت $f \circ g$ واحدا لواحد فإن $f$ واحد لواحد.

هـ) إذا كانت $f \circ g$ واحدا لواحد فإن $g$ واحد لواحد.

و) إذا كانت $f \circ g$ غامرة فإن $f$ غامرة.

٢-١١٠ نفرض أن $f$ دالة من $X$ إلى $Y$

وأن $A \subseteq X, \quad B \subseteq Y$

نُعَرِّف

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\},$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

يُطلَق على $f^{-1}(B)$ صورة $B$ المعكوسة تحت تأثير $f$ (inverse image of B under f).

أ) نفرض أن $g = \{(1, a), (2, c), (3, c)\}$ دالة من $X = \{1, 2, 3\}$ إلى $Y = \{a, b, c, d\}$. ونفرض أن

$$S = \{1\}, \quad T = \{1, 3\}, \quad U = \{a\}, \quad V = \{a, c\}$$

أوجد كلا من

$$g(S), \quad g(T), \quad g^{-1}(U), \quad g^{-1}(V)$$

ب) نفرض أن $f$ دالة من $X$ إلى $Y$. اثبت أن $f$ واحد لواحد إذا وفقط إذا كان

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

لجميع المجموعات الجزئية $A, B$ من $X$.

ج) نفرض أن $f$ دالة من $X$ إلى $Y$. عَرِّف علاقة $R$ على $X$ كما يلي

$$xRy \quad \text{if} \quad f(x) = f(y)$$

اثبت أن $R$ علاقة تكافؤ على $X$

د) نفرض أن $f$ دالة من $X$ على $Y$ (from X onto Y). ونفرض أن

$$S = \{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y\}$$

[ملاحظة: تعريف $f^{-1}(B)$ حيث B مجموعة معطى في بداية السؤال]

اثبت أن S تجزيء للمجموعة X (partition of X). وَصِف علاقة تكافؤ تؤدي إلى هذا التجزيء.

٢-١١١ نفرض أن R علاقة تكافؤ على مجموعة A. عَرِّف دالة f من A إلى مجموعة طبقات تكافؤ A (equivalence classes of A) بالقاعدة $f(x) = [x]$. متى تتحقق المعادلة $f(x) = f(y)$ ؟

٢-١١٢ نفرض أن R علاقة تكافؤ على مجموعة A. ونفرض أن g دالة من A إلى مجموعة X (from A into a set X) تحقق الخاصية

$$\text{if} \quad xRy, \text{then } g(x) = g(y)$$

اثبت أن $h([x]) = g(x)$ تعرِّف دالة من مجموعة طبقات تكافؤ A إلى X (into).

إرشاد: نحتاج لإثبات أن h تسند قيمة وحيدة لـ $[x]$ (uniquely assigns a value to $[x]$)، أي أنه

$$\text{if } [x] = [y], \quad \text{then } g(x) = g(y)$$

٢-١١٣ نفرض أن f دالة من X إلى Y. اثبت أن f تكون واحدا لواحد إذا وفقط إذا كلما كانت g دالة واحدا لواحد من أي مجموعة A إلى X فإن $f \circ g$ تكون واحدا لواحد. (f is one - to - one iff whenever g is a one-to-one function from any set A to X, $f \circ g$ is one-to-one)

٢-١١٤ نفرض أن f دالة من X إلى Y. اثبت أن f تكون غامرة (onto) على Y إذا وفقط إذا كلما كانت g دالة من Y غامرة (onto) على أي مجموعة Z ، فإن $g \circ f$ تكون غامرة على Z.

**٢-١١٥ نفـرض أن U مجموعـة شـاملة (universal set) ، ونفـرض أن $X \subseteq U$ .**
**نُعَرِّف**

$$C_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in X \\ 0 & \text{if} \quad x \notin X \end{cases}$$

**ويُطلَق على $C_X$ دالة X المميِّزة (في U)**
[characteristic function of X (in U)]

**اثبت صحة العلاقات التالية:**

أ) $C_{X \cap Y}(x) = C_X(x) . C_Y(x) \quad \forall x \in U$

ب)

$$C_{X \cup Y}(x) = C_X(x) + C_Y(x) - C_X(x).C_Y(x) \quad \forall x \in U$$

ج) $C_{\overline{X}}(x) = 1 - C_X(x) \quad \forall x \in U$

د) $C_{X-Y}(x) = C_X(x)[1 - C_Y(x)] \quad \forall x \in U$

هـ) $\text{if } X \subseteq Y, \text{then } C_X(x) \le C_Y(x) \quad \forall x \in U$

و) $C_{X \cup Y}(x) = C_X(x) + C_Y(x) \quad \forall x \in U, \text{iff}$

$$X \cap Y = \phi$$

ز) **أوجـد صـيغة لـ $C_{X \Delta Y}$ ، حيـث $X \Delta Y$ يمثـل الفـارق المتماثـل / المتنـاظر (symmetric difference) بين X, Y ، والمعـرَّف سـابقا في السؤال ٢-١٥.**

ح) **اثبـت أن الدالـة f مـن P(U) إلى مجموعـة الـدوال المميـِّزة في U والمعرَّفة بالعلاقة**

$$f(X) = C_X$$

**واحد لواحد وغامرة.**

ط) **نفرض أن f دالة مميِّزة في X ، وأن R علاقة معرَّفة على X كما يلي:**

$$xRy \quad \text{if} \quad f(x) = f(y)$$

**بناء على السؤال ٢-١١٠-ج) فإن R علاقة تكافؤ. ما هي طبقات التكافؤ؟**

٢-١١٦ نفرض أن $X, Y$ مجموعتان ، وأن لدينا التعريف التالي لتكافؤ مجموعتين:

يقال إن المجموعة $X$ مكافئة للمجموعة $Y$ (X is equivalent to Y) إذا كانت هناك دالة واحد لواحد وغامرة (one-to-one & onto) من $X$ إلى $Y$.

أ) اثبت أن تكافؤ مجموعتين (set equivalence) هو علاقة تكافؤ (equivalence relation).

ب) إذا كانت $X, Y$ مجموعتين محدودتين / منتهيتين (finite sets) ، وكانت $X$ مكافئة لـ $Y$ ، فماذا يمكننا استنتاجه عن المجموعتين $X, Y$ ؟

ج) اثبت أن المجموعتين $\{1, 2, ...\}$ , $\{2, 4, ...\}$ متكافئتان.

د) اثبت أنه بالنسبة لأي مجموعة $X$: $X$ غير مكافئة للمجموعة $P(X)$ وهي مجموعة قوى $X$ (power set of X).

هـ) نفرض أن $X, Y$ مجموعتان. اثبت أنه توجد دالة واحد لواحد من $X$ إلى $Y$ إذا وفقط إذا وُجدت دالة من $Y$ غامرة على $X$ (onto).

٢-١١٧ يُقال لمؤثر ثنائي $f$ (binary operator) إنه تبادلي (commutative) إذا كان

$$f(x, y) = f(y, x) \qquad \forall x, y \in X$$

اذكر – بالنسبة لكل دالة $f$ من الدوال التالية – ما إذا كانت الدالة $f$ مؤثرا ثنائيا على المجموعة $X$ أم لا. وإن لم تكن $f$ مؤثرا ثنائيا فاذكر السبب. وإن كانت $f$ مؤثرا ثنائيا فهل هو تبادلي أم لا ؟

أ) $f(x, y) = x + y, \quad X = \{1, 2, ...\}$

ب) $f(x, y) = x - y, \quad X = \{1, 2, ...\}$

ج) $f(s, t) = st, \quad X = \text{set of strings over } \{a, b\}$

د) $f(x, y) = x/y, \quad X = \{0, 1, 2, ...\}$

هـ) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy, \quad X = \{1, 2, ...\}$

٢-١١٨اعط مثالا لمؤثر أحادي (مختلف عن المؤثر $f(x) = x \quad \forall x$) على المجموعة التالية:

أ) $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

ب) مجموعة السلاسل على $\{a, b\}$ (set of strings over).

٢-١١٩اثبت أنه إذا كانت f دالة واحدا لواحد وغامرة من X على Y ، فإن

$$\{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

تكون أيضا دالة واحدا لواحد وغامرة ولكن من Y على X.

٢-١٢٠اذكر صحة أو خطأ (true/false) كل من العبارات التالية وذلك لجميع الأعداد الحقيقية. وإذا كانت العبارة خاطئة اعط مثالا مناقضا.

أ) $\lceil x+3 \rceil = \lceil x \rceil + 3$

ب) $\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$

ج) $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lceil y \rceil$

٢-١٢١اثبت أنه إذا كانت n عددا صحيحا فرديا فإن

أ) $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)$

ب) $\left\lceil \frac{n^2}{4} \right\rceil = \frac{n^2+3}{4}$

٢-١٢٢أ) أوجد قيمة لـ x بحيث تجعل

$$\lceil 2x \rceil = 2\lceil x \rceil - 1$$

ب) اثبت أنه لجميع الأعداد الحقيقية x

$$2\lceil x \rceil - 1 \le \lceil 2x \rceil \le 2\lceil x \rceil$$

**٢-١٢٣ الأول من يناير في العام x يقابل يوم الأسبوع المبين في الجدول التالي في الصف رقم y ، حيث y تحسب بالمعادلة**

$$y = \left( x + \left\lfloor \frac{x-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x-1}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-1}{400} \right\rfloor \right) \bmod 7$$

**أوجد يوم الأسبوع المقابل للأول من يناير في كل من الأعوام التالية:**

**أ) عام** 1945

**ب) عام** 2000

**ج) عام** 2004

| الأول من يناير | y |
|---|---|
| الأحد | 0 |
| الاثنين | 1 |
| الثلاثاء | 2 |
| الأربعاء | 3 |
| الخميس | 4 |
| الجمعة | 5 |
| السبت | 6 |

**٢-١٢٤ نفرض أن X ترمز إلى مجموعة المتتاليات ذوات المجالات المحدودة / المنتهية** (set of sequences with finite domain)**. نُعرِّف علاقة R على X كما يلي:**

sRt if |domain s| = |domain t| and
, if domain s = {m, m+1, ..., m+k} &
domain t = {n, n+1, ..., n+k}
then $s_{m+i} = t_{n+i}$ for i = 0, 1, ..., k.

**أ) اثبت أن R علاقة تكافؤ.**

**ب) اشرح بالكلمات معنى تكافؤ متتاليتين في X تحت تأثير العلاقة R.**

**ج) المتتالية تُعَدُّ دالة ، وبالتالي فهي مجموعة أزواج مرتبة. وبناء على ذلك فأي متتاليتين تكونان متساويتين إذا تساوت مجموعتا الأزواج المرتبة لهاتين المتتاليتين. وَضِّح الفارق بين المتتاليتين المتكافئتين** (equivalent sequences) **في X والمتتاليتين المتساويتين** (equal sequences) **في X.**

**٢-١٢٥ نفرض أن $X$ هي مجموعة سلاسل الرموز على $\{a, b\}$ التي طولها 4 ، وأن $Y$ هي مجموعة سلاسل الرموز على $\{a, b\}$ التي طولها 3. ونفرض أن $f$ دالة مُعَرَّفة من $X$ إلى $Y$ بالقاعدة التالية:**

**$f(\alpha)$ : هي سلسلة الرموز التي تتكون من أول ثلاثة رموز في $\alpha$.**

**هل $f$ واحد لواحد ؟ هل $f$ غامرة ؟**

**٢-١٢٦ اذكر عددين $x, y$ يحققان المعادلة**

$$\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor = \lfloor xy \rfloor - 1$$

**٢-١٢٧ اعط مثالا لدالتين $f, g$ بحيث تكون $f \circ g$ غامرة (onto) ولكن $g$ ليست غامرة.**

**٢-١٢٨ نفرض أن لدينا دالة البعثرة**

$$h(x) = x \bmod 13$$

**وضّح كيف سيتم إدخال البيانات**

784, 281, 1141, 18, 1, 329, 620, 43, 31, 684

**– بهذا الترتيب المعطى – في خلايا فارغة ابتداءً ومرقمة من 0 إلى 12.**

# الفصل الثالث

## طرق العَــدِّ
## Counting Methods

**أحيانا كثيرة في تطبيقات الرياضيات المتقطعة تواجهنا مسألة العد. فمثلا لتقدير وقت تشغيل خوارزمية معينة** (run time of an algorithm) **نحتاج لعد / لحساب عدد مرات تنفيذ مجموعة معينة من الخطوات أو العُرَى** (loops)**. كذلك نحتاج للعد بصورة أساسية في تطبيقات نظرية الاحتمالات. ونظراً لأهمية مسألة العد فقد تم التوصل إلى كثير من الأساليب والطرق المساعدة والمفيدة** (useful aids) **لهذا الغرض. وفي هذا الفصل نناقش بإذن الله بعض الأساليب والطرق والأدوات المستخدمة للعد.**

### أولا: مبادئ أساسية
### Basic Principles

**مثال ٣-١:**

**الشكل التالي يبين قائمة الطعام المتوفرة والتي تتكون من نوعين من المقبِّلات / المشهِّيات** (appetizers) **، وثلاثة أطباق رئيسية** (main courses) **وأربعة مشروبات** (beverages).

i) **كم عدد وجبات الطعام المختلفة** (different dinners) **التي يمكن تكوينها من طبق رئيسي ومشروب ؟ إذا رمزنا للطبق الرئيسي بحرفه الأول وللمشروب بحرفه الأول ، فإننا نلاحظ أن لدينا 12 وجبة مختلفة هي:**

FM, FO, FA, FT, CM, CO, CA, CT, BM, BO, BA, BT

**حيث** CO **مثلا تشير إلى وجبة الطعام المكونة من دجاج** (Chicken) **وعصير برتقال** (Orange Juice)**. ونلاحظ أن لدينا ثلاثة أطباق رئيسية وأربعة مشروبات وأن** $4\times 3 = 12$.

| | | |
|---|---|---|
| | **المقبلات / المشهِّيات**<br>Appetizers | |
| **حساء خضروات** | Vegetable Soup | 1.250 |
| **سلطة** | Salad | 1.000 |
| | **الأطباق الرئيسية**<br>Main Courses | |
| **سمك (شرائح)** | Fish Filet | 3.150 |
| **دجاج** | Chicken | 2.950 |
| **لحم بقري** | Beef | 3.000 |
| | **المشروبات**<br>Beverages | |
| **لبن** | Milk | 0.500 |
| **عصير برتقال** | Orange Juice | 0.400 |
| **عصير تفاح** | Apple Juice | 0.400 |
| **شاي** | Tea | 0.250 |

**قائمة الطعام**

food menu

ii) **كذلك يوجد لدينا 24 وجبة طعام مختلفة تتكون كل منها من أحد المقبلات وطبق رئيسي واحد ومشروب واحد:**

VFM, VFO, VFA, VFT, VCM, VCO, VCA, VCT,
VBM, VBO, VBA, VBT, SFM, SFO, SFA, SFT,
SCM, SCO, SCA, SCT, SBM, SBO, SBA, SBT

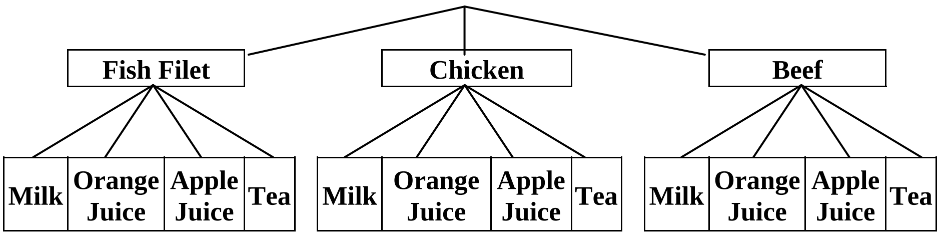
**حيث وجبة الطعام التي تتكون من أحد المقبلات الذي حرفه الأول** X **، وطبق رئيسي حرفه الأول** Y **، ومشروب حرفه الأول** Z **يُشار / يُرمز إليها بالرموز** XYZ**. ونلاحظ أن لدينا مقبِّلين وثلاثة أطباق رئيسية وأربعة مشروبات ، وأن** $24 = 2 \times 3 \times 4$

في كل من هذين المثالين لوجبات الطعام المختلفة (وجبة من مكوِّنين فقط ، أو وجبة من ثلاثة مكوِّنات) لاحظنا أن العدد الإجمالي للوجبات المختلفة كان مساويا لحاصل ضرب أعداد المكوِّنات ($12 = 3 \times 4,\ \ 24 = 2 \times 3 \times 4$). وهذا يوضح "مبدأ الضرب" التالي:

**مبدأ / قاعدة الضرب (Multiplication Principle)**

**إذا أمكن تنفيذ مهمة معينة [ممارسة نشاط (activity) معين] بعدد t من الخطوات المتعاقبة (successive steps) ، وأمكن تنفيذ الخطوة الأولى بعدد $n_1$ من الطرق (ways) ، ثم أمكن تنفيذ الخطوة الثانية بعدد $n_2$ من الطرق ، ...، ثم أمكن تنفيذ الخطوة رقم t بعدد $n_t$ من الطرق ، فإن عدد الطرق المختلفة الممكنة لتنفيذ هذه المهمة [عدد الأنشطة المختلفة الممكنة (number of different possible activities)] يساوي $n_1.n_2 \cdots .n_t$ .**

وفي المثال الأول لعد (counting) وجبات الطعام المختلفة التي تتكون أي منها من طبق رئيسي ومشروب واحد فإن الخطوة الأولى (first step) هي: " اختر الطبق الرئيسي " (select the main course) ، والخطوة الثانية هي: " اختر المشروب " (select the beverage). وهكذا فإن $n_1 = 3,\ n_2 = 4$ ، وبقاعدة الضرب فإن العدد الكلي لوجبات الطعام المختلفة يساوي $3 \times 4 = 12$. والشكل التالي يوضح لماذا نضرب $3 \times 4$ ، حيث لدينا ثلاث مجموعات (groups) ، وفي كل مجموعة أربعة أشياء (objects).




ويمكننا تلخيص قاعدة الضرب بأننا نقوم بضرب أعداد طرق تنفيذ كل خطوة من الخطوات حينما يتم تنفيذ مهمة معينة (نشاط معين) بخطوات متعاقبة / متتالية.

**مثال ٣-٢:**

**بفرض أن لدينا قائمة الطعام المبينة في المثال السابق ، كم عدد وجبات الطعام المختلفة التي تتكون أي منها من طبق رئيسي ومشروب اختياري** (optional beverage) **(أي أن الوجبة قد تحتوي وقد لا تحتوي على مشروب) ؟**

**الحل:**

**يمكننا تكوين أي من هذه الوجبات بعملية مكونة من خطوتين:**

**الأولى: اختر الطبق الرئيسي** (select the main course).

**الثانية: اختر مشروبا (اختياريا)** (select an optional beverage).

**عدد طرق اختيار الطبق الرئيسي:** $n_1 = 3$ **(سمك ودجاج ولحم بقري).**

**عدد طرق اختيار المشروب (الاختياري):** $n_2 = 5$ **(لبن وعصير برتقال وعصير تفاح وشاي وعدم اختيار أي مشروب)**

**وبتطبيق قاعدة الضرب فإن عدد الوجبات المختلفة يساوي** $3 \times 5 = 15$

**وتأكيدا لهذه النتيجة نعطي فيما يلي تمثيل / رموز هذه الوجبات (الخمس عشرة) حيث** N **تعني أن الوجبة لا تحتوي على مشروب** (No beverage):

FM, FO, FA, FT, FN,
CM, CO, CA, CT, CN,
BM, BO, BA, BT, BN.

**مثال ٣-٣**

أ) **كم عدد سلاسل الرموز** (strings) **التي طول أي منها يساوي** 4 **، وتتكون أي منها باستخدام الحروف** A, B, C, D, E **علما بأنه لا يُسمح بأي تكرار** (repetition) ؟

ب) **كم عدد سلاسل الرموز في أ) تبدأ بالحرف** B ؟

ج) **كم عدد سلاسل الرموز في أ) لا تبدأ بالحرف** B ؟

**الحل:**

أ) نستخدم قاعدة الضرب. يمكن تكوين سلسلة رموز طولها 4 بأربع خطوات متعاقبة: اختر الحرف الأول. اختر الحرف الثاني. اختر الحرف الثالث. اختر الحرف الرابع. الحرف الأول يمكن أن يختار بخمس طرق. وبعد أن يتم اختيار الحرف الأول يمكن أن يُختار الحرف الثاني بأربع طرق (حيث لا يُسمح بتكرار الحرف الأول). وبعد أن يتم اختيار الحرف الثاني يمكن أن يُختار الحرف الثالث بثلاث طرق (حيث لا يُسمح بتكرار أي من الحرفين الأول والثاني). وبعد أن يتم اختيار الحرف الثالث يمكن اختيار الحرف الرابع بطريقتين. وبتطبيق قاعدة الضرب يكون عدد السلاسل المختلفة مساويا

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120 \quad \text{strings}$$

ب) السلاسل التي تبدأ بالحرف B يمكن أن تُكوَّن بأربع خطوات متعاقبة: اختر الحرف الأول. اختر الحرف الثاني. اختر الحرف الثالث. اختر الحرف الرابع. الحرف الأول (B) يمكن أن يختار بطريقة واحدة. الحرف الثاني يمكن أن يختار بأربع طرق. الحرف الثالث يمكن أن يختار بثلاث طرق. والحرف الرابع يمكن أن يختار بطريقتين. وبالتالي بتطبيق قاعدة الضرب يكون عدد السلاسل التي تبدأ بالحرف B مساويا:

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 = 24 \quad \text{Strings}$$

ج) من الجزء أ) نعلم أن عدد السلاسل التي طول أي منها 4 والمكونة من الحروف ABCDE مع عدم التكرار يساوي 120 سلسلة. ومن الجزء ب) من السؤال نعلم أن 24 من هذه السلاسل تبدأ بالحرف B. وبالتالي يكون عدد السلاسل في أ) التي لا تبدأ بالحرف B مساويا

$$120 - 24 = 96 \quad \text{strings}$$

مثال ٣-٤:

في الصورة الرقمية (digital picture) نـود تشفير (encoding) كمية الضـوء (amount of light) عند كل نقطة كسلسلة مكونة مـن ثمانيـة أرقـام ثنائيـة (وحـدات ثنائيـة) (as an eight-bit string). كـم عـدد القيـم (values) المختلفـة الممكنـة (possible) عند النقطة الواحدة ؟

الحل:

يمكـن إجـراء عمليـة التشفير بثمانيـة أرقـام ثنائيـة (وحـدات ثنائيـة) [binary digits (binary units) bits] بتنفيذ ثمـان خطـوات متعاقبـة. اختـر الوحـدة الثنائيـة الأولى. اختر الوحدة الثنائية الثانية. ... . اختـر الوحـدة الثنائيـة الثامنـة. وحيـث أن أي وحـدة ثنائيـة bit يمكـن اختيارهـا بطـريقتين (0 أو 1) فبتطبيـق قاعـدة الضـرب يكـون العـدد الإجمـالي للتشـفيرات بثمـان وحـدات ثنائيـة (eight-bit encoding) مساويا

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$$

مثال ٣-٥:

باستخدام مبدأ الضرب اثبـت أن أي مجموعـة $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ بهـا n عنصر يكون لهـا عـدد مـن المجموعـات الجزئيـة (subsets) يسـاوي $2^n$. [ملاحظـة: سبق إثبات هذه النتيجة باستخدام الاستقراء الرياضي].

الحل:

أي مجموعـة جزئيـة مـن المجموعـة المعطـاة يمكـن أن تُكـوَّن بعـدد n مـن الخطـوات المتعاقبـة: اختـر أو لا تخـتر $x_1$ (pick or do not pick $x_1$)، اختـر أو لا تخـتر $x_2$ ، ... ، اخـتر أو لا تخـتر $x_n$. وحيـث أن كـل خطـوة يمكـن أن تنفـذ بطريقتين ، فيكون عدد المجموعات الجزئية المختلفة الممكنة مساويا:

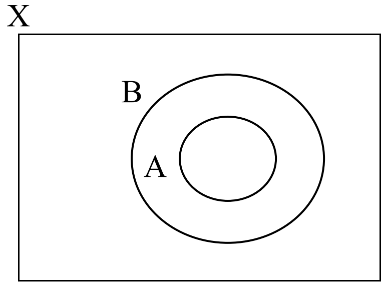
$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{\text{n مرة}} = 2^n$$

مثال ٣-٦:

نفرض أن $X$ مجموعة مكونة من $n$ عنصر. كم عدد الأزواج المرتبة $(A, B)$ (ordered pairs) التي تحقق الشرط $A \subseteq B \subseteq X$ ؟

**الحل:**

إذا أُعطينا زوجا مرتبا $(A, B)$ يحقق الشرط المذكور ، فإننا نرى (انظر الشكل) أن أي عنصر في $X$ سيكون في واحدة بالضبط من المجموعات الثلاث $A, B - A, X - B$ . وبالعكس إذا قمنا بإسناد (assigning) كل عنصر من عناصر $X$ لواحدة من المجموعات الثلاث: المجموعة $A$ [وبالفرض (assumption) أيضا للمجموعة $B$ والمجموعة $X$] ، أو المجموعة $B-A$ [وبالفرض أيضا للمجموعة $X$] ، أو




المجموعة $X-B$ ، فإننا نحصل على زوج مرتب وحيد $(A, B)$ (unique ordered pair) يحقق الشرط $A \subseteq B \subseteq X$ . وهكذا فإن عدد الأزواج المرتبة $(A, B)$ التي يحقق كل منها الشرط المذكور يساوي عدد طرق إسناد عناصر $X$ للمجموعات الثلاث $A, B-A, X-B$. ويمكننا تنفيذ مهمة هذه الإسنادات باتباع العملية (process) التالية المكونة من $n$ خطوة: أسند العنصر الأول من $X$ لإحدى المجموعات الثلاث $A, B-A, X-B$. أسند العنصر الثاني من $X$ لإحدى المجموعات الثلاث $A, B-A, X-B$ ، ... ، أسند العنصر رقم $n$ من $X$ لإحدى المجموعات الثلاث $A, B-A, X-B$. ونظرا لأن كل خطوة من هذه الخطوات يمكن تنفيذها بثلاث طرق ، فيكون عدد الأزواج المرتبة $(A, B)$ التي تحقق الشرط $A \subseteq B \subseteq X$ هو:

$$\underbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}_{\text{n مرة}} = 3^n$$

* * *

فيما يلي نناقش قاعدة أخرى من قواعد العد – غير قاعدة الضرب – يُطلق عليها " قاعدة الجمع / مبدأ الجمع " ، ونبدأ أولا بمثال يوضح هذه القاعدة ثم نذكر نصها.

**مثال ٣-٧:**

كم عدد السلاسل التي تتكون أي منها من ثمانية أرقام ثنائية (0 أو 1) بحيث تبدأ بالأرقام الثلاثة 101 أو 111 ؟

**الحل:**

يمكننا تكوين (constructing) أي سلسلة من ثمانية أرقام ثنائية مبتدئة بالأرقام 101 بخمس خطوات متعاقبة: اختر الرقم الثنائي الرابع. اختر الرقم الثنائي الخامس .... اختر الرقم الثنائي الثامن. وحيث أن كلا من هذه الأرقام الثنائية (bits) الخمسة يمكن اختياره بطريقتين (0 أو 1) ، فبمبدأ الضرب يكون عدد هذه السلاسل (ثمانية الأرقام الثنائية ، والمبتدئة بالأرقام 101).

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$$

وبالحجة السابقة نفسها يمكننا استنتاج أن عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية ، والمبتدئة بالأرقام 111 يساوي 32 كذلك.

وحيث أنه توجد 32 سلسلة ثمانية الأرقام الثنائية تبدأ بالأرقام 101 و 32 سلسلة ثمانية الأرقام الثنائية تبدأ بالأرقام 111 ، فمعنى هذا أنه توجد (= 32 + 32) 64 سلسلة ثمانية الأرقام الثنائية (64 eight-bit strings) تبدأ إما بالأرقام 101 أو بالأرقام 111.

في هذا المثال أضفنا عددي السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية (32 و 32) من كل نوع (each type) لإيجاد النتيجة النهائية. وقاعدة الجمع تحدد لنا متى نجمع لحساب العدد الكلي للاحتمالات.

**مبدأ / قاعدة الجمع (Addition Principle)**

**نفرض أن لدينا المجموعات $X_1, X_2, \cdots, X_t$ ، وأن المجموعة $X_i$ رقم i تحتوي على $n_i$ عنصر. إذا كانت المجموعة $\{X_1, X_2, \cdots, X_t\}$ عائلة متباعدة زوجا زوجا (pairwise disjoint family) [أي أن: $(i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \phi)$] فإن عدد العناصر المحتملة / الممكنة (number of possible elements) التي يمكن اختيارها من المجموعة $X_1$ أو المجموعة $X_2$ أو ... أو المجموعة $X_t$ يساوي**

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t$$

**[وبصيغة مكافئة (equivalently):**

**الاتحاد $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_t$ يحتوي على عدد من العناصر يساوي $n_1 + n_2 + \cdots + n_t$]**

**في المثال السابق (مثال ٣-٧) يمكننا أن نعتبر أن:**

$X_1$: **ترمز إلى مجموعة السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية التي تبدأ بالأرقام** 101 ،

و $X_2$: **ترمز إلى مجموعة السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية التي تبدأ بالأرقام** 111.

**وحيث أن $X_1$ متباعدة عن $X_2$ فبناءً على مبدأ الجمع يكون عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية من أي من النوعين – والذي هو عدد العناصر في $X_1 \cup X_2$ – مساويا** 32 + 32 **أي** 64.

**ويمكننا أن نلخص قاعدة الجمع بأننا نقوم بجمع أعداد العناصر في المجموعات الجزئية حينما يمكن تفريق العناصر المطلوب عدها إلى عناصر في مجموعات جزئية متباعدة.**

**وهكذا فإذا كنا نَعُدُّ أشياء يتم بناؤها أو تكوينها بخطوات متعاقبة فإننا نستخدم قاعدة الضرب. أما إذا كان لدينا مجموعات متباعدة من الأشياء وأردنا أن نعرف العدد الإجمالي لهذه الأشياء ، فإننا نستخدم قاعدة الجمع.**

**مثال ٣-٨:**

نفرض أن لدينا خمسة كتب مختلفة في علم الحاسوب ، وثلاثة كتب مختلفة في الرياضيات ، وكتابين مختلفين في الآداب. كم عدد الطرق التي يمكننا بها اختيار كتابين في علمين مختلفين من هذه العلوم الثلاثة (الحاسوب ، والرياضيات ، والآداب).

**الحل:**

يمكننا اختيار كتابين أحدهما في علم الحاسوب والآخر في الرياضيات. كما يمكننا اختيار كتابين أحدهما في علم الحاسوب والآخر في الآداب. وكذلك يمكننا اختيار كتابين أحدهما في الرياضيات والآخر في الآداب. أما الاختيار الأول فيمكننا – بمبدأ الضرب – تنفيذه بعدد من الطرق يساوي $5\times 3=15$. وأما الاختيار الثاني فيمكننا بالمثل تنفيذه بعدد من الطرق يساوي $5\times 2=10$. وأما الاختيار الثالث والأخير فيمكننا بالمثل تنفيذه بعدد من الطرق يساوي $3\times 2=6$. وحيث أن هذه الاختيارات الثلاثة (مجموعات الاختيارات) متباعدة زوجا زوجا ، فيمكننا استخدام قاعدة الجمع لنستنتج أن عدد طرق اختيار كتابين في مجالين مختلفين من مجالات العلوم الثلاثة المعطاة يساوي

$$15+10+6=31$$

**مثال ٣-٩:**

طُلب من لجنة مكونة من ستة أشخاص: A, B, C, D, E, F أن تختار (select) من بينها ثلاثة أشخاص للمناصب الثلاثة: الرئيس (chairperson) ، وأمين السر (السكرتير secretary) ، والخازن (أمين الصندوق treasurer).

أ) بكم طريقة يمكن تنفيذ هذه المهمة (اختيار المسئولين للمناصب الثلاثة) ؟

ب) بكم طريقة يمكن تنفيذ هذه المهمة إذا اشتُرط أن يكون A أو B رئيسا ؟

ج) بكم طريقة يمكن تنفيذ هذه المهمة إذا اشتُرط أن يتولى E أحد هذه المناصب ؟

د) بكم طريقة يمكن تنفيذ هذه المهمة إذا اشتُرط أن يتم اختيار كل من D و F لمنصبين من هذه المناصب ؟

**الحل:**

أ) يمكن اختيار الأشخاص الثلاثة لهذه المناصب بالخطوات الثلاث المتعاقبة التالية: اختر الرئيس . اختر أمين السر . اختر الخازن.

الرئيس: يمكن أن يختار بستة طرق. وبعد أن يتم اختياره ، فإن أمين السر: يمكن أن يختار بخمسة طرق. وبعد أن يتم اختيار كل من الرئيس وأمين السر فإن الخازن: يمكن أن يختار بأربعة طرق. وبالتالي فإن العدد الكلي للطرق الممكنة لتنفيذ مهمة اختيار المسئولين يساوي:

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

ب) إذا كان A رئيسا فبحجة (argument) مثل تلك التي ذكرناها في أ) يكون عدد طرق اختيار مسئولَي المنصبين الباقيين مساويا $20 = 4 \times 5$. وبالمثل إذا كان B رئيسا فهناك 20 طريقة مختلفة لاختيار المسئولَين الباقيين. وحيث أن هاتين الحالتين متباعدتان ، فبقاعدة الجمع يكون العدد الإجمالي للطرق الممكنة مساويا

$$20 + 20 = 40$$

ج) (الحل الأول) إذا تولى E منصب الرئاسة فنرى – بحجة مماثلة لما ذكرناه في (أ) – أن هناك 20 طريقة لاختيار شخصين للمنصبين الباقيين. وبالمثل إذا تولى E منصب أمانة السر فهناك 20 طريقة لشغل المنصبين الباقيين. وكذلك إذا تولى E منصب الخزانة فهناك 20 طريقة لشغل المنصبين الباقيين. وحيث أن هذه الحالات الثلاث متباعدة زوجا زوجا (pairwise disjoint) ، فبتطبيق قاعدة الجمع يكون العدد الإجمالي للطرق الممكنة مساويا

$$20 + 20 + 20 = 60$$

(حل آخر) سننفذ المهمة المطلوبة (تعيين E في أحد المناصب واختيار شخصين آخرين للمنصبين الباقيين) بثلاث خطوات متعاقبة: أسند منصبا لـ E. (assign E an office). املأ أعلى منصب متبقي (fill the highest remaining office). املأ المنصب الأخير (fill the last office). الخطوة الأولى (إسناد أحد المناصب الثلاثة لـ E) يمكن أن تتم بثلاث طرق. وبعد أن يتم إسناد منصب لـ E ، يمكن تنفيذ الخطوة الثانية بخمسة طرق لشغل

أعلى منصب متبقي. وبعد إسناد منصب لـ E وشغل أعلى منصب متبقي يمكن تنفيذ الخطوة الثالثة والأخيرة بأربع طرق لشغل المنصب الأخير. وبتطبيق قاعدة الضرب يكون العدد الإجمالي للطرق الممكنة مساويا

$$3 \times 5 \times 4 = 60$$

د) سننفذ المطلوب (اختيار D و F وشخص ثالث للمناصب الثلاثة) بثلاث خطوات متعاقبة: أسند منصبا لـ D. أسند منصبا آخر لـ F. أسند المنصب المتبقي لشخص ثالث. الخطوة الأولى يمكن تنفيذها بثلاث طرق لإسناد منصب لـ D. وبعد ذلك الإسناد يكون لدينا طريقتان لإسناد منصب لـ F. وبعد إسناد هذين المنصبين لـ D و F ، يكون لدينا ٤ طرق لشغل المنصب المتبقي (لإسناد هذا المنصب المتبقي لأحد الأشخاص الأربعة الآخرين). وبتطبيق قاعدة الضرب يكون العدد الإجمالي للطرق الممكنة:

$$3 \times 2 \times 4 = 24$$

*  *  *

## ثانيا: التبديلات والتوافقات
## Permutations and Combinations

**مثال ٣-١٠:**

نفرض أن لدينا أربعة مرشحين (candidates): A, B, C, D لتولي أحد المناصب. وحتى لا يكون هناك تمييز لبعض المرشحين على بعض نود عدم الالتزام بترتيب معين لرموز / لأسماء المرشحين في جميع بطاقات الانتخاب / الاقتراع (ballots) ، بل سنقوم بطباعة بطاقات الاقتراع بمختلف الطرق الممكنة لترتيب أسماء المرشحين. كم عدد بطاقات الاقتراع المختلفة (distinct ballots)؟

**الحل:**

يمكن إنشاء البطاقة بأربع خطوات متعاقبة. اختر الاسم الأول في قائمة المرشحين. اختر الاسم الثاني في القائمة. اختر الاسم الثالث في

**القائمة. اختر الاسم الرابع في القائمة. الخطوة الأولى يمكن تنفيذها بأربع طرق. وبعد أن يتم اختيار الاسم الأول يمكن اختيار الاسم الثاني (أي تنفيذ الخطوة الثانية) بثلاث طرق. وبعد أن يتم اختيار الاسم الثاني يمكن اختيار الاسم الثالث (أي تنفيذ الخطوة الثالثة) بطريقتين. وبعد أن يتم اختيار الاسم الثالث يتم اختيار الاسم الرابع (أي تنفيذ الخطوة الرابعة) بطريقة واحدة. وبتطبيق قاعدة الضرب يكون العدد الإجمالي لبطاقات الاقتراع المختلفة مساويا**

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

**تعريف:**

**تبديل (permutation)** n **عنصر من العناصر المختلفة** $x_1, \cdots, x_n$ (distinct elements) **هو ترتيب** (an ordering) **لهذه العناصر** $x_1, \cdots, x_n$ **التي عددها** n.

**فمثلا هناك** 24 **ترتيبا مختلفا للأربعة مرشحين (في مثال ٣-١٠) ، أي أن هناك** 24 **تبديلا لأربعة عناصر / أشياء** (objects).

**مثال ٣-١١:**

**كم عدد تبديلات / تباديل** (permutations) **ثلاثة عناصر** A, B, C **؟**

**الحل:**

**بطريقة مماثلة لحل المثال السابق (مثال ٣-١٠) نجد أن عدد التباديل يساوي:**

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

**وهذه التباديل الستة هي:**

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

**وعموما:**

**نظرية ٣-١:**

**عدد تبديلات** n **عنصر يساوي** n!.

(There are n! permutations of n elements)

**البرهان:**

يمكن تكوين (constructing) أي تبديل لعدد n من العناصر بتنفيذ عدد n من الخطوات المتعاقبة: اختر العنصر الأول. اختر العنصر الثاني ... اختر العنصر الأخير (رقم n). العنصر الأول يمكن اختياره بعدد n من الطرق. وبعد أن يتم اختيار العنصر الأول يمكننا اختيار العنصر الثاني بعدد n-1 من الطرق. وبعد أن يتم اختيار العنصر الثاني يمكننا اختيار العنصر الثالث بعدد n-2 من الطرق. وهكذا .... وباستخدام قاعدة الضرب يكون العدد الإجمالي للطرق المختلفة الممكنة لتكوين تبديل (أي عدد تبديلات) n عنصر مساويا:

$$n(n-1)\ (n-2)\ ...\ 2.1 = n!$$

**مثال ٣-١٢:**

كم عدد التباديل المختلفة لعدد 10 من العناصر ؟

**الحل:**

عدد التباديل يساوي

$$10! = 10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 3,628,800$$

**مثال ٣-١٣:**

كم عدد التباديل المختلفة للحروف A, B, C, D, E, F التي تحتوي على السلسلة الجزئية DEF ؟ [أي أن أيّ تبديل للحروف الستة المعطاة يجب أن يحتوي على الثلاثة حروف D, E, F متعاقبة بالترتيب DEF ، كالتبديل BADEFC أو التبديل DEFBCA مثلا].

**الحل:**

حتى نضمن وجود السلسلة الجزئية DEF (أي الحروف الثلاثة D, E, F مجتمعة معا بهذا الترتيب DEF) في أي تبديل ، فنعتبر – لتكوين أي تبديل – أن لدينا أربعة أشياء (tokens / objects) / عناصر لنا الخيار في وضعها بجوار بعضها البعض بأي ترتيب نشاء ، وهذه الأشياء الأربعة هي: DEF (كشئ واحد) والثلاثة حروف المتبقية: A, B, C:

$$\boxed{DEF}\quad \boxed{A}\quad \boxed{B}\quad \boxed{C}$$

الأشياء الأربعة التي يمكننا تبديل مواضعها كما نشاء

**وبتطبيق النظرية السابقة (نظرية ٣-١) فإن عدد تباديل أربعة أشياء يساوي !4 تبديلا ، أي أن عدد التباديل المختلفة للحروف A, B, C, D, E, F التي تحتوي على السلسلة الجزئية DEF يساوي**

$$4! = 24$$

**مثال ٣-١٤:**

**كم عدد التباديل المختلفة للحروف A, B, C, D, E, F التي تحتوي على الحروف الثلاثة DEF مجتمعة معا (together) ولكن بأي ترتيب (any order) ؟**

[**مثلا من هذه التباديل:** CBAFED, EDFBCA, BADEFC].

**الحل:**

**يمكننا حل هذه المسألة بإجراء مكون من خطوتين** (two-step procedure):

- **اختر ترتيبا** (ordering) **للحروف** D, E, F.
- **كوِّن تبديلا للحروف** A, B, C, D, E, F **يحتوي على ترتيب الحروف** D, E, F **الذي اخترته في الخطوة السابقة.**

**الخطوة الأولى يمكن أن تنفذ بعدد** $3! = 6$ **من الطرق المختلفة [بنظرية ٣-١]. والخطوة الثانية يمكن أن تنفذ بعدد** 24 **من الطرق المختلفة [من المثال السابق (مثال ٣-١٣)]. وبتطبيق قاعدة الضرب يكون عدد التباديل المختلفة للحروف** A, B, C, D, E, F **التي تحتوي على الحروف** D, E, F **مجتمعة معا بأي ترتيب مساويا:**

$$6 \times 24 = 144$$

**مثال ٣-١٥:**

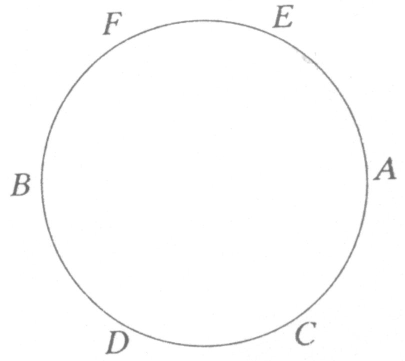
**كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن لستة أشخاص أن يجلسوا بها** (be seated) **حول مائدة مستديرة** (around a circular table)؟

**ملاحظة: إذا أمكن الحصول على طريقة جلوس** (seating) **معينة من طريقة جلوس أخرى عن طريق تحرك** (moving) **كل شخص عددا معينا (وليكن** n) **من**

المقاعد (seats) في اتجاه دوران عقارب الساعة (clockwise) ، فإن طريقتي الجلوس هاتين تعتبران متطابقتين (identical) وليستا مختلفتين.

**الحل:**

نفرض أننا سنرمز للأشخاص الستة بالحروف A, B, C, D, E, F. وحيث أن طرق الجلوس (seatings) التي نحصل عليها بالتدوير (rotation) تُعَدُّ متطابقة ، فيمكننا تحديد مقعد (seat) شخص معين – وليكن A مثلا – اختياريا (arbitrarily). ولتحديد مقاعد الخمسة أشخاص الآخرين يمكننا أن نرتبهم (order them) أولا ، ثم نجلسهم (seat them) بهذا الترتيب (order) – الذي حددناه – في اتجاه دوران عقارب الساعة مبتدئين من A. فمثلا الترتيب / التبديل C, D, B, F, E (permutation) سيحدد طريقة الجلوس المبينة بالشكل. وحيث أن عدد التباديل المختلفة لخمسة عناصر يساوي 120 = !5 فهناك 120 طريقة مختلفة يمكن لستة أشخاص أن يجلسوا بها حول مائدة مستديرة.




**ملاحظة:**

باستخدام الحجة (argument) السابقة نفسها يمكننا إثبات أن عدد الطرق المختلفة التي يمكن لعدد n من الأشخاص أن يجلسوا بها حول مائدة مستديرة يساوي !(n-1).

*   *   *

أحيانا نحتاج لترتيب (ordering) عدد r من العناصر المختارة (selected) من بين عدد n من العناصر الموجودة (available) لدينا. ومثل هذا الترتيب (ترتيب r عنصر مختارة من n عنصر) يُطلق عليه تبديل – r (r-permutation).

**تعريف:**

**تبديل–r (r-permutation)** لعناصر (مختلفة) [(distinct) elements] عددها n ، $x_1, \cdots, x_n$ هو ترتيب (ordering) لمجموعة جزئية – عدد عناصرها r – (r-element subset) من المجموعة $\{x_1, \cdots, x_n\}$ . ونرمز لعدد تباديل–r (number of r-permutations) لمجموعة مكونة من n عنصر مختلف (n distinct elements) بالاصطلاح **P(n, r)**.

**مثال ٣–١٦:**

من أمثلة تباديل–2 (2-permutations) للعناصر a, b, c:

ab, ba, ca

**ملاحظة:**

في تعريف تبديل–r إذا كانت r = n فإننا نحصل على ترتيب جميع العناصر التي عددها n. أي أن تبديل–n لعناصر عددها n هو ما أطلقنا عليه سابقا "تبديلا" (a permutation). وبالتالي (بنظرية ٣–١) فإن $P(n, n) = n!$.

**نظرية ٣–٢:**

عدد تباديل-r لمجموعة مكونة من أشياء مختلفة (distinct objects) عددها n يساوي

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1), \quad r \leq n$$

**البرهان:**

علينا أن نوجد عدد الطرق المختلفة لترتيب (ordering) عناصر عددها r مختارة من مجموعة عناصر عددها n (n-element set): العنصر الأول يمكن أن يُختار بعدد n من الطرق. وبعد أن يتم اختياره يمكننا اختيار العنصر الثاني بعدد n-1 من الطرق. ونستمر في اختيار العناصر واحداً تلو الآخر حتى نصل [بعد أن يتم اختيار العنصر رقم (r-1)] إلى اختيار العنصر رقم r ، وهذا الاختيار يمكن أن يتم

بعدد $n-r+1$ من الطرق. وبتطبيق قاعدة الضرب يكون عدد تباديل-$r$ لمجموعة مكونة من أشياء مختلفة عددها $n$ مساويا

$$n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-r+1)$$

**مثال ٣-١٧:**

عدد تباديل-2 للمجموعة $X = \{a, b, c\}$ المكونة من 3 عناصر يساوي

$$P(3, 2) = 3 \times 2 = 6$$

وهذه التباديل-2 الستة هي:

ab, ac, ba, bc, ca, cb

**مثال ٣-١٨:**

كم عدد الطرق المختلفة التي يمكننا بها اختيار: رئيس ، ونائب رئيس (vice-chairperson) ، وأمين سر ، وخازن من مجموعة / زمرة (group) مكونة من 10 أشخاص ؟

**الحل:**

نحتاج لإيجاد عدد الطرق المختلفة لترتيب (ordering) أربعة أشخاص مختارين (selected) من مجموعة مكونة من 10 أشخاص ، وذلك لأن الترتيب سيعني تحديد / اختيار (picking) رئيس [وهذا هو أول اختيار (first pick)] ، ونائب رئيس [الاختيار الثاني] ، وأمين سر [الاختيار الثالث] ، وخازن [الاختيار الرابع] ، وتحديد كل من هؤلاء يتم بطريقة وحيدة (uniquely). وبتطبيق نظرية ٣-٢ فإن عدد الطرق المختلفة المطلوب يساوي

$$P(10, 4) = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

ويمكننا أيضا الوصول إلى هذه النتيجة مباشرة بتطبيق قاعدة الضرب.

**نتيجة لنظرية ٣-٢:**

عدد تباديل-$r$ لمجموعة مكونة من أشياء مختلفة عددها $n$ يساوي

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

**البرهان:**

(من نظرية ٣-٢) $$P(n, r) = n(n-1)\dots(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots 2.1}{(n-r)\cdots 2.1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

**مثال ٣-١٩:**

**باستخدام صيغة نتيجة نظرية ٣-٢ يمكننا كتابة حل المثال السابق (مثال ٣-١٨) كما يلي**

$$P(10, 4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}$$

**مثال ٣-٢٠:**

**نفرض أن لدينا سبعة أشخاص من فريق M ، وخمسة أشخاص من فريق J. بكم طريق يمكن للاثني عشر شخصا أن يصطفوا (line up) في صف واحد بحيث لا يقف شخصان من الفريق J متجاورين ؟**

**الحل:**

**نفرض أن عملية وقوف جميع الأشخاص في صف واحد ستتم في خطوتين: رتِّب أفراد الفريق M. رتِّب أفراد الفريق J. الخطوة الأولى (ترتيب 7 أفراد) يمكن أن تتم بعدد $7! = 5040$ من الطرق. أي يمكن لأفراد الفريق M السبعة أن يقفوا في صف واحد بـ 5040 ترتيب مختلف. وبعد أن يصطفوا بترتيب معين (وليكن مثلا في المواضع $M_1 \rightarrow M_7$) نقوم بتنفيذ الخطوة الثانية: ترتيب أفراد الفريق J. وحيث أنه لا يسمح بوقوف شخصين من J متجاورين فيكون أمام أفراد الفريق J ثمانية مواضع ممكنة للوقوف فيها ، وهي الفراغات المشار إليها بالرمز – في الشكل التالي):**

$$- M_1 - M_2 - M_3 - M_4 - M_5 - M_6 - M_7 -$$

**وبذلك يكون عدد الطرق المختلفة الممكنة لوقوف أفراد الفريق J مساويا**

$$P(8, 5) = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720 \quad \text{ways}$$

وبتطبيق قاعدة الضرب يكون عدد الطرق الممكنة لوقوف سبعة أشخاص من فريق M وخمسة أشخاص من فريق J في صف واحد بحيث لا يقف شخصان من الفريق J متجاورين مساويا

$$5040 \times 6720 = 33,868,800$$

والآن نتجه للحديث عن التوافقات. يطلَق على مجموعة أشياء (objects) مختارة (selected) بدون اعتبار للترتيب (order): **"توافقا" (combination).**

**تعريف:**

نفرض أننا قد أُعطينا مجموعة $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ تحتوي على عناصر مختلفة عددها n.

أ) توافق-r من X (r-combination of X) هو اختيار غير مرتَّب (unordered selection) لعناصر من X عددها r [أي هو مجموعة جزئية من X عدد عناصرها r (r-element subset of X)].

ب) نرمز لعدد توافقات -r من مجموعة مكونة من عناصر مختلفة عددها n (number of r-combinations of a set of n distinct elements) بالاصطلاح $C(n, r)$ أو $\binom{n}{r}$.

**مثال ٣-٢١:**

قررت مجموعة مكونة من خمسة طلاب A, B, C, D, E التحدث مع رئيس قسم الرياضيات من أجل أن يقوم القسم بعرض مقررات أكثر في الرياضيات المتقطعة. فأخبرهم رئيس القسم برغبته في التحدث مع لجنة من ثلاثة طلاب فقط (بدلا من خمسة). فكم عدد الطرق المختلفة التي يمكن لمجموعة هؤلاء الطلاب الخمسة أن يختاروا ثلاثة من بينهم لهذه اللجنة الثلاثية ؟

**الحل:**

للوصول إلى النتيجة المطلوبة نلاحظ أننا يجب ألا نأخذ الترتيب (order) في الاعتبار (فمثلا لا فرق بين أن يتحدث رئيس القسم مع A, B, C أو أن يتحدث مع C, A, B). وببساطة إذا قمنا بسرد اللجان الثلاثية المختلفة الممكنة من بين هؤلاء الطلاب الخمسة نجد أن هناك 10 طرق مختلفة:

ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE

وبالاصطلاح المذكور في التعريف السابق نجد أن عدد الطرق المختلفة لاختيار ثلاثة من بين الخمسة طلاب للتحدث مع رئيس القسم يساوي C(5, 3) ، وهو عدد توافقات–3 من خمسة عناصر (number of 3-combinations of 5 elements). وقد وجدنا أن

$$C(5, 3) = 10$$

وفيما يلي نستنتج صيغة لحساب C(n, r).

**نظرية ٣–٣:**

عدد توافقات–r من مجموعة أشياء مختلفة عددها n (number of r-combinations of a set of n distinct objects) يعطَى بالعلاقة:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}, \quad r \le n$$

**فكرة البرهان:**

سنستنتج الصيغة المطلوبة لحساب $C(n, r)$ عن طريق حساب قيمة عدد تباديل – r لمجموعة مكونة من n عنصر بطريقتين: في الأولى نستخدم ببساطة الصيغة P(n, r) لهذه القيمة. وفي الثانية نصل لهذه القيمة عن طريق تعبير يحتوي على C(n, r). وبمساواة القيمتين [اللتين حصلنا عليهما من الطريقتين للعدد نفسه ، أي عدد تباديل – r لمجموعة مكونة من n عنصر] نحصل على الصيغة المطلوبة لـ C(n, r).

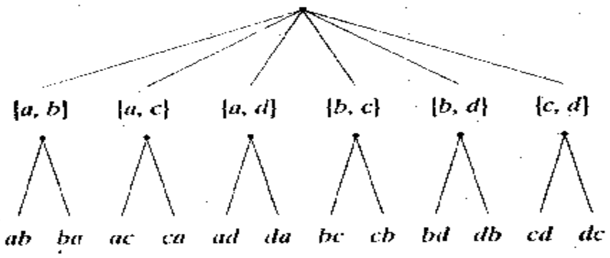
**البرهان:**

عدد تباديل–r لمجموعة مكونة من n عنصر مختلف يعطى بالصيغة P(n,r). ويمكننا تكوين تباديل–r لمجموعة X مكونة من n عنصر مختلف بخطوتين متعاقبتين:

الأولى: اختيار توافق – r من المجموعة X [أي اختيار مجموعة جزئية غير مرتبة من r عنصر (selecting an unordered subset of X of r items)].

والثانية: ترتيب (ordering) هذا التوافق (هذه المجموعة الجزئية).

مثلا لتكوين أحد تباديل–2 للمجموعة {a, b, c, d} المكونة من 4 عناصر: يمكننا أولا اختيار أحد توافقات–2 ثم ترتيبه. والشكل التالي يبين كيفية الحصول على جميع تباديل–2 للمجموعة {a, b, c, d} بهذه الطريقة.




تباديل-2 (2-permutations) للمجموعة {a, b, c, d}

وبتطبيق قاعدة الضرب فإن عدد تباديل-r هو حاصل ضرب عدد توافقات-r ، وعدد ترتيبات (orderings) r عنصر ، أي أن:

$$P(n, r) = C(n, r) \, . \, r!$$

وبالتالي فإن

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}$$

وبتطبيق نظرية ٣-٢ ونتيجتها نحصل على الصيغتين الأخريتين لعدد توافقات–r C(n, r) في النظرية الحالية.

مثال ٣-٢٢:

بكم طريقة يمكننا اختيار لجنة (committee) ثلاثية (أي لجنة من ثلاثة أشخاص) من مجموعة مكونة من 10 أشخاص (مختلفين) [(selecting a committee of three from a group of 10 (distinct) persons].

الحل:

حيث أن اللجنة هي زمرة / مجموعة غير مرتبة من الأشخاص (unordered group of people) ، فعدد الطرق المطلوب يساوي

$$C(10, 3) = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$$

مثال ٣-٢٣:

تتكون الهيئة الإدارية لاتحاد الطلبة من 6 طلاب و 5 طالبات. كم عدد الطرق المختلفة التي يمكننا بها تشكيل لجنة لتنظيم رحلات الحج والعمرة للطلاب

**والطالبات بحيث تتكون اللجنة من ثلاثة طلاب (من بين الستة طلاب) وطالبتين (من بين الخمس طالبات) ؟**

**الحل:**

**يمكننا تشكيل اللجنة بخطوتين متعاقبتين: اختر طلاب اللجنة. اختر طالبتي اللجنة. الخطوة الأولى يمكن أن تنفذ بعدد من الطرق يساوي**

$$C(6, 3) = 20$$

**والخطوة الثانية يمكن أن تنفذ بعدد من الطرق يساوي**

$$C(5, 2) = 10$$

**وبتطبيق قاعدة الضرب يكون العدد الإجمالي للجان الحج والعمرة الممكن تشكيلها مساويا**

$$20 \times 10 = 200$$

**مثال ٣-٢٤:**

**كم عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية** (eight-bit strings) **[أي أن طول أي سلسلة منها يساوي** 8 **، والسلسلة مكونة من أرقام ثنائية] التي تحتوي أي منها على أربعة آحاد بالضبط** (exactly four 1's) **[مثل السلسلة** 10011010] **؟**

**الحل:**

**أي سلسلة ثمانية الأرقام الثنائية بحيث تحتوي على أربعة آحاد بالضبط يمكن تحديدها بصورة وحيدة** (uniquely determined) **بمجرد معرفة أي الأرقام الثنائية** (bits) **آحاد ، وهذا يمكن الوصول إليه بعدد من الطرق يساوي:**

$$C(8, 4) = 70$$

**مثال ٣-٢٥:**

**تحتوي مجموعة أوراق اللعب العادية** (ordinary deck of cards) **على** 52 **ورقة تنقسم إلى أربع مجموعات** (4 suits) **– تتسم كل مجموعة منها بِنَقْش معين (بشَكْل خاص) – يُطلق عليها: "الاسباتي"** (clubs) **، و" الديناري" (الشكل المعين** diamonds) **، و" الكوبة " (شكل القلب** hearts) **، و" البستوني "** (spades)**. وتحتوي كل مجموعة من هذه المجموعات الأربع على** 13 **فئة** (denominations)

**هـي: واحـد** (ace) ، **والأرقـام مـن** 2 **إلى** 10 ، **والولـد** (jack) ، **والبنـت** (queen) ، **والملك** (king).

أ) **كم عدد الطرق المختلفة الممكنة بالنسبة للاعب لاختيار خمس أوراق (غير مرتبـة)** [(unordered) five-card poker hands] **مـن بـين مجموعـة الأوراق الـ** 52 [52-card deck] ؟

ب) **كم عـدد الطرق المختلفـة لتكـوين خمـس أوراق في يد لاعـب** (poker hands) **بحيث تكون جميع الأوراق الخمسة من المجموعـة نفسها (النَّقْش نفسه / الشكل نفسه)** (same suit) ؟

ج) **كـم عـدد الطـرق المختلفـة لتكـوين خمـس أوراق في يـد لاعـب ، بحيـث تكـون ثـلاث أوراق مـن فئـة** (denomination) **معينـة وورقتـان مـن فئـة أخرى ؟**

**الحل:**

أ) $C(52, 5) = 2{,}598{,}960$

ب) **يمكن تكوين خمس أوراق بحيث تكون جميعها مـن الـنقش نفسه بخطـوتين متعـاقبتين: اخـتر نقشا معينا** (select a suit). **اخـتر خمـس أوراق مـن هـذا النقش المختار** (select five cards from the chosen suit).

**الخطوة الأولى يمكن أن تنفذ بأربع طـرق. والخطـوة الثانيـة يمكـن أن تنفذ بعـدد** $C(13, 5)$ **مـن الطـرق. وباسـتخدام قاعـدة الضـرب يكـون الجـواب المطلوب**

$$4 \times C(13, 5) = 5148$$

ج) **يمكن تكوين خمس أوراق بحيث تكون ثلاث منها من فئة معينة واثنتان من فئة أخرى بأربع خطوات متعاقبة:**

- **اختر الفئة الأولى** (select the first denomination).
- **اختر الفئة الثانية** (select the second denomination).
- **اختـر ثـلاث أوراق مـن الفئـة الأولى** (select 3 cards of the first denomination).

- اختر ورقتين من الفئة الثانية (select 2 cards of the second denomination). الفئة الأولى يمكن أن تختار بـ 13 طريقة. وبعد أن تم اختيار الفئة الأولى يمكننا اختيار الفئة الثانية بـ 12 طريقة. ويمكننا اختيار 3 أوراق من الفئة الأولى بعدد $C(4, 3)$ من الطرق. ويمكننا اختيار ورقتين من الفئة الثانية بعدد $C(4, 2)$ من الطرق. وبتطبيق قاعدة الضرب يكون الجواب المطلوب

$$13 \times 12 \times C(4,3) \times C(4,2) = 3744$$

## ثالثا: معاملات ذات الحدين والمتطابقات التوافيقية
## Binomial Coefficients and Combinatorial Identities

قد لا يبدو للوهلة الأولى أن هناك علاقة بين التعبير $(a+b)^n$ وموضوع التوافقات. ولكننا سنرى بإذن الله فيما يلي أنه يمكننا الحصول على صيغة لمفكوك $(a+b)^n$ (expansion of) باستخدام صيغة عدد توافقات – r لأشياء عددها n.

نظرية ذات الحدين تعطي صيغة للمعاملات في مفكوك $(a+b)^n$. نظرا لأن

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\,(a+b)\cdots(a+b)}_{\text{(n factors) عامل } n}, \qquad (*)$$

فإن المفكوك ينتج من اختيار إما a أو b من كل من هذه الأقواس / العوامل ، وضرب هذه الرموز المختارة بعضها ببعض ، ثم جمع حواصل الضرب (products) الناتجة هذه. مثلا لإيجاد مفكوك $(a+b)^3$ نختار إما a أو b من القوس / العامل الأول (a+b) ، وإما a أو b من القوس الثاني (a+b) ، وإما a أو b من القوس الثالث (a+b) ، ثم نضرب هذه الحروف المختارة بعضها ببعض ، وأخيرا نجمع حواصل الضرب التي حصلنا عليها. فإذا اخترنا a من كل من الأقواس الثلاثة وضربنا حصلنا على الحد aaa. بينما إذا اخترنا a من القوس الأول ، وb من القوس الثاني ، وa من

القوس الثالث وضربنا فإننا نحصل على الحد aba ، وهكذا. والجدول التالي يبين جميع الاحتمالات المختلفة لهذه الاختيارات.

| الاختيار من القوس الأول (a+b) | الاختيار من القوس الثاني (a+b) | الاختيار من القوس الثالث (a+b) | حاصل ضرب الاختيارات |
|---|---|---|---|
| a | a | a | $aaa = a^3$ |
| a | a | b | $aab = a^2b$ |
| a | b | a | $aba = a^2b$ |
| a | b | b | $abb = ab^2$ |
| b | a | a | $baa = a^2b$ |
| b | a | b | $bab = ab^2$ |
| b | b | a | $bba = ab^2$ |
| b | b | b | $bbb = b^3$ |

حساب $(a+b)^3$

وإذا جمعنا حواصل ضرب جميع الاختيارات فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)\,(a+b)\,(a+b)\\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb\\ &= a^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

نلاحظ في المعادلة السابقة (*) أن حدا صيغته $a^{n-k}\,b^k$ ينشأ من اختيار b من k عامل / قوس واختيار a من باقي العوامل / الأقواس وعددها n-k. ومثل هذا الإجراء يمكن أن يتم بعدد C(n, k) من الطرق ، وذلك لأن C(n, k) تحسب عدد طرق اختيار k عنصر من بين n عنصر. وهكذا فإن الحد $a^{n-k}\,b^k$ يظهر عدد C(n, k) من المرات. وبالتالي فإننا نحصل على العلاقة التالية التي تعرف باسم نظرية ذات الحدين.

$$(a+b)^n = C(n,0)a^n b^0 + C(n,1)a^{n-1}b^1 + C(n,2)a^{n-2}b^2$$
$$+ \cdots + C(n,n-1)a^1 b^{n-1} + C(n,n)a^0 b^n \qquad (**)$$

**نظرية ٣-٤: (نظرية ذات الحدين)**

**إذا كان** $a, b$ **عددين حقيقيين ، و**$n$ **عددا صحيحا موجبا فإن**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k$$

**البرهان:**

**برهان النظرية يسبق منطوقها.**

**ويمكننا أيضا برهنة نظرية ذات الحدين بالاستقراء على** $n$**.**

**الأعداد** $C(n,r)$ **تعرف باسم معاملات ذات الحدين** (binomial coefficients) **لأنها تظهر في المفكوك (**) لذات الحدين** $a+b$ (binomial) **مرفوعة لأس** (power) **معين.**

**مثال ٣-٢٦:**

**إذا فرضنا أن** $n = 3$ **في نظرية ذات الحدين فإننا نحصل على**

$$(a+b)^3 = C(3,0)a^3b^0 + C(3,1)a^2b^1 + C(3,2)a^1b^2 + C(3,3)a^0b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

**مثال ٣-٢٧:**

**أوجد مفكوك** $(3x-2y)^4$ **باستخدام نظرية ذات الحدين.**

**الحل:**

**في نظرية ذات الحدين نعوض**

$$a = 3x, \qquad b = -2y, \qquad n = 4$$

**لنحصل على**

$$(3x-2y)^4 = (a+b)^4$$
$$= C(4,0)a^4b^0 + C(4,1)a^3b^1 + C(4,2)a^2b^2$$
$$+ C(4,3)a^1b^3 + C(4,4)a^0b^4$$

$$
\begin{aligned}
&= C(4,0)(3x)^4(-2y)^0 + C(4,1)(3x)^3(-2y)^1 \\
&\quad + C(4,2)(3x)^2(-2y)^2 + C(4,3)(3x)^1(-2y)^3 \\
&\quad + C(4,4)(3x)^0(-2y)^4 \\
&= 3^4x^4 + 4.3^3x^3(-2y) + 6.3^2x^2(-2)^2y^2 \\
&\quad + 4(3x)(-2)^3y^3 + (-2)^4y^4 \\
&= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4
\end{aligned}
$$

**مثال ٣-٢٨:**

**أوجد معامل** $a^5b^4$ **في مفكوك** $(a+b)^9$

**الحل:**

**الحد الذي يشتمل على** $a^5b^4$ **يظهر في مفكوك نظرية ذات الحدين عندما تكون** $n = 9,\ k = 4$:

$$C(n,k)a^{n-k}b^k = C(9,4)a^5b^4 = 126a^5b^4$$

**وبالتالي يكون معامل** $a^5b^4$ **مساويا** 126.

**مثال ٣-٢٩:**

**أوجد معامل** $x^2y^3z^4$ **في مفكوك** $(x+y+z)^9$.

**الحل:**

**نظراً لأن**

$$(x+y+z)^9 = (x+y+z)\,(x+y+z)\cdots(x+y+z)$$

{(9 terms) أقواس / حدود 9}

**فإننا نحصل على** $x^2y^3z^4$ **كلما ضربنا** x **مختارة من قوسين من بين التسعة أقواس ، مع** y **مختارة من ثلاثة من بين التسعة أقواس ، مع** z **مختارة من أربعة من بين التسعة أقواس. ويمكننا اختيار قوسي** x **بعدد** $C(9, 2)$ **من الطرق. وبعد إتمام هذا الاختيار يمكننا اختيار ثلاثة أقواس** y **بعدد** $C(7, 3)$ **من الطرق. ثم يتبقى لنا**

بعد ذلك أربعة أقواس z. وهكذا يصبح معامل $x^2y^3z^4$ في مفكوك $(x+y+z)^9$:

$$C(9,2)C(7,3)=\frac{9!}{2!\,7!}\frac{7!}{3!\,4!}=\frac{9!}{2!\,3!\,4!}=1260.$$

ومن الملاحظ أنه يمكننا كتابة معاملات ذات الحدين (binomial coefficients) في شكل مثلثي (triangular form) يُعرف باسم مثلث باسكال (Pascal's triangle) ، وهو المبين في الشكل التالي. ويتكون ضلعا المثلث المحددان له (borders) من آحاد 1's (انظر الشكل): وأي قيمة داخلية (interior value) تساوي مجموع القيمتين الموجودتين فوقها. والنظرية التالية تعطي الصياغة الرسمية لهذه العلاقة.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\iddots & & & & & \vdots & & & & & \ddots
\end{array}$$

مثلث باسكال

**نظرية ٣-٥:**

$$C(n+1,k)=C(n,k-1)+C(n,k), \qquad 1\le k\le n$$

**البرهان:**

نفرض أن X مجموعة مكونة من n عنصر. اختر $a\notin X$ .

C(n+1, k): تعطي عدد المجموعات الجزئية من $Y=X\cup\{a\}$ التي تتكون كل منها من k عنصر. ويمكننا تقسيم هذه المجموعات الجزئية إلى طبقتين متباعدتين (2 disjoint classes):

(١) المجموعات الجزئية من Y التي لا تحتوي على a.

(٢) المجموعات الجزئية من Y التي تحتوي على a.

المجموعات الجزئية في الطبقة الأولى (١) هي مجرد مجموعات جزئية من X تتكون أي منها من k عنصر ، وعدد هذه المجموعات الجزئية C(n, k). وأي

مجموعة جزئية في الطبقة الثانية (٢) تتكون من مجموعة جزئية من X – تحتوي على (k-1) عنصر – بالإضافة إلى العنصر a ، وعدد هذه المجموعات الجزئية في الطبقة (٢) يساوي C(n, k-1). وبالتالي فإن

$$C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$$

ملاحظتان:

١) يمكن برهنة هذه النظرية أيضا باستخدام نظرية ٣–٣.

٢) أي متطابقة تنتج من عملية عد (counting process) يطلَق عليها متطابقة توافيقية (combinatorial identity) ، والحجة / البرهان الذي يؤدي إلى صياغة (formulation) هذه المتطابقة يطلق عليه "برهان توافيقي" / "حجة توافيقية" (combinatorial argument) ، مثل البرهان الذي اتبعناه لإثبات النظرية الحالية (نظرية ٣–٥).

المثال التالي يوضح كيفية استخدام هذه النظرية (نظرية ٣–٥) مع نظرية ذات الحدين لإثبات بعض المتطابقات التوافيقية.

مثال ٣–٣٠:

باستخدام نظرية ذات الحدين استنتج المتطابقة التالية:

$$\sum_{k=0}^{n} C(n, k) = 2^n$$

الحل:

بمقارنة صيغة مجموع هذه المتطابقة مع صيغة مجموع نظرية ذات الحدين

$$\sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, a^{n-k}\, b^k$$

نلاحظ أنهما الصيغة نفسها باستثناء التعبير $a^{n-k}\, b^k$ ، ويمكننا حذف / إلغاء هذا التعبير إذا أخذنا $a = b = 1$ ، وفي هذه الحالة تعطينا نظرية ذات الحدين

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)\,.\,1^{n-k}\,.\,1^k$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)$$

**حل آخر:** [بإعطاء برهان توافيقي (combinatorial argument)]

نفرض أن $X$ مجموعة مكونة من $n$ عنصر.

عدد المجموعات الجزئية من $X$ يساوي $2^n$ (i)

عدد المجموعات الجزئية من $X$ التي تحتوي كل منها على $k$ عنصر يساوي $C(n, k)$. وبالتالي فإن

العدد الكلي للمجموعات الجزئية من $X$ يساوي $\sum_{k=0}^{n} C(n, k)$ (ii)

من تساوي (i) و (ii) تنتج المتطابقة المطلوبة.

**مثال ٣-٣١:**

باستخدام نظرية ٣-٥ اثبت المتطابقة

$$\sum_{i=k}^{n} C(i, k) = C(n+1, k+1) \qquad (*)$$

**الحل:**

من نظرية ٣-٥:

$$C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$$

$$\Rightarrow \quad C(n, k-1) = C(n+1, k) - C(n, k)$$

وبوضع $n = i$ ، والتعويض $k+1$ بدلا من $k$ نحصل على الصيغة التالية لهذه النظرية:

$$C(i, k) = C(i+1, k+1) - C(i, k+1)$$

الطرف الأيسر في المتطابقة المعطاة يساوي

$$\sum_{i=k}^{n} C(i,k) = C(k,k) + C(k+1,k) + C(k+2,k) + \cdots + C(n,k)$$

$$\begin{aligned} &= 1 + C(k+2,k+1) - C(k+1,k+1) \\ &\quad + C(k+3,k+1) - C(k+2,k+1) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + C(n+1,k+1) - C(n,k+1) \\ &= C(n+1,k+1) \end{aligned}$$

**مثال ٣-٣٢:**

**استخدم المتطابقة (*) المعطاة في مثال ٣-٣١ وذلك لإيجاد قيمة المجموع**

$$1 + 2 + \ldots + n$$

**الحل:**

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+n &= C(1,1) + C(2,1) + \cdots + C(n,1) \\ &= C(n+1,1+1) \qquad \text{(*) باستخدام المتطابقة} \\ &= C(n+1,2) \\ &= \frac{(n+1)n}{2} \end{aligned}$$

## تمرينات رقم ٣

### أولا: مبادئ أساسية

٣-١ كم عدد وجبات الطعام المختلفة التي يمكن تكوينها من قائمة الطعام الموضحة في مثال ٣-١ والتي تحقق الشروط التالية:

أ) أحد المقبلات ، ومشروب واحد.

ب) أحد المقبلات ، وطبق رئيسي واحد ، ومشروب واحد اختياري (أي أن الوجبة قد تحتوي وقد لا تحتوي على مشروب).

ج) أحد المقبلات اختياري ، وطبق رئيسي واحد ، ومشروب واحد اختياري.

٣-٢ نفرض أن إحدى الأخوات لديها ثمانية خِمارات مختلفة ، وأربع عباءات مختلفة ، وخمسة أزواج مختلفة من الأحذية. كم عدد الأزياء المختلفة التي يمكن أن تظهر بها ؟

٣-٣ عدد الاختيارات (options) المتاحة (available) بالنسبة لطراز (model) معين من السيارات هو: 5 ألوان داخلية ، 6 ألوان خارجية ، نوعان من المقاعد ، 3 أنواع من الماكينات ، 3 أنواع من أجهزة المذياع. كم عدد الاختيارات المختلفة المتاحة أمام المشتري لاختيار سيارة ؟

٣-٤ ابتُكر نظام "بريل" (Braille system) لتمثيل الرموز (characters) – التي يستخدمها من ابتُلوا بالعَمى – في القرن التاسع عشر. وتتكون الرموز في هذا النظام من نقاط بارزة (raised dots) ، حيث يمكن اختيار مواضع النقاط من عمودين رأسيين (2 vertical columns) يتكون كل منهما من ثلاث نقاط. أي أن هناك ستة مواضع للنقاط ، يمكن لكل موضع منها أن يكون بارزا أو غير بارز ، وذلك لتمثيل رمز واحد. ولكن يُشترط أن يكون موضع واحد على الأقل – من بين الستة مواضع – بارزا. كم عدد رموز "بريل" المختلفة التي يمكن تمثيلها بهذا النظام ؟

٣-٥ قُذِفت (rolled) قطعتا نرد (2 dice) ، إحداهما زرقاء والأخرى حمراء.

أ) كم عدد النتائج الكلية الممكنة (possible outcomes) ؟

ب) كم عدد النتائج التي تعطي مجموعا (sum) يساوي 4 ؟

ج) كم عدد النتائج المضاعَفَة (double outcomes) [النتيجة المضاعَفَة تحدث عندما يظهر العدد نفسه في قطعتي النرد] ؟

د) كم عدد النتائج التي تعطي مجموعا يساوي 7 أو مجموعا يساوي 11 ؟

هـ) كم عدد النتائج التي يَظهر فيها العدد 2 في قطعة النرد الزرقاء ؟

و) كم عدد النتائج التي يَظهر فيها العدد 2 في قطعة نرد واحدة بالضبط؟

ز) كم عدد النتائج التي يَظهر فيها العدد 2 في قطعة نرد واحدة على الأقل؟

ح) كم عدد النتائج التي لا يظهر فيها العدد 2 في أي من قطعتي النرد ؟

ط) كم عدد النتائج التي تعطي أي منها مجموعا زوجيا ؟

٣-٦ نفرض أن هناك 10 طرق من مكة إلى القدس ، و 5 طرق من القدس إلى سراييفو.

أ) كم عدد الطرق من مكة إلى سراييفو مرورا بالقدس ؟

ب) كم عدد الرحلات المستديرة (round-trips) [ أي ذهابا وإيابا] التي تسلك المسار: مكة – القدس – سراييفو – القدس – مكة ؟

ج) كم عدد الرحلات المستديرة التي تسلك المسار: مكة – القدس – سراييفو – القدس – مكة بشرط ألا تسلك رحلة العودة (return trip) عكس طريق رحلة الذهاب من مكة إلى سراييفو ؟

٣-٧ نفرض أن رقم رخصة السيارة (car license number) يحتوي على ثلاثة حروف (3 letters) يتبعها رقمان (2 digits). كم عدد اللوحات المعدنية المختلفة التي تحمل أرقام رخص السيارات (different car license plates) التي يمكن تكوينها:

أ) مع السماح بتكرار (repetition) أي حرف من الحروف (وعددها 26) أو أي رقم من الأرقام (وعددها 10) ؟

ب) بشرط عدم تكرار أي حرف أو أي رقم ؟

٣–٨ أ) كم عدد سلاسل الرموز ثمانية الأرقام الثنائية (eight-bit strings) التي تبدأ بالسلسلة الجزئية 1100 ؟

ب) كم عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية التي تبدأ وتنتهي بالرقم 1؟

ج) كم عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية التي يكون فيها الرقم الثاني أو الرقم الرابع أو كلاهما 1 [(second or fourth bit (or both)] ؟

د) كم عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية التي تحتوي أي منها على الرقم 1 مرة واحدة بالضبط (exactly one 1) ؟

هـ) كم عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية التي تحتوي أي منها على الرقم 1 مرتين بالضبط (exactly two 1's) ؟

و) كم عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية التي تحتوي أي منها على الرقم 1 مرة واحدة على الأقل (at least one 1) ؟

ز) كم عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية التي يمكن قراءة أي منها طردا أو عكسا بالكيفية نفسها [أي تقرأ من اليسار إلى اليمين أو من اليمين إلى اليسار بالكيفية نفسها ، مثل السلسلة 01111110 ، ومثل هذه السلسلة يطلق عليها " سلسلة مزدوجة القراءة " (palindrome)]

٣–٩ نفرض أن لجنة مكونة من ستة أشخاص A, B, C, D, E, F ستختار من بينها رئيسا وأمين سر وخازنا.

أ) كم عدد الاختيارات التي تستبعد C ؟

ب) كم عدد الاختيارات التي لا يُسند في أي منها أي منصب إلى B أو F؟

ج) كم عدد الاختيارات التي يتولى في أي منها كل من B و F منصبا ؟

د) كم عدد الاختيارات التي يتولى D في أي منها منصبا ، بينما لا يتولى F أي منصب ؟

هـ) كم عدد الاختيارات التي يكون D في أي منها رئيسا أو لا يتولى أي منصب ؟

و) كم عدد الاختيارات التي يكون B في أي منها رئيسا أو خازنا ؟

٣-١٠ نفرض أننا سنستخدم الحروف A, B, C, D, E لتكوين سلاسل طول أي منها يساوي 3.

أ) كم عدد السلاسل التي يمكن تكوينها إذا سمحنا بتكرار أي حرف (allow repetitions) ؟

ب) كم عدد السلاسل التي يمكن تكوينها إذا لم نسمح بالتكرار ؟

ج) كم عدد السلاسل التي لا تحتوي أي منها على الحرف A مع السماح بالتكرار ؟

د) كم عدد السلاسل التي لا تحتوي أي منها على الحرف A مع عدم السماح بالتكرار ؟

هـ) كم عدد السلاسل التي تحتوي أي منها على الحرف A مع السماح بالتكرار ؟

و) كم عدد السلاسل التي تحتوي أي منها على الحرف A مع عدم السماح بالتكرار ؟

٣-١١ بالنسبة للأعداد الصحيحة من 5 إلى 200 احتوائيا (inclusive):

أ) كم عدد هذه الأعداد الصحيحة ؟

ب) كم عددا زوجيا (في هذه الأعداد) ؟

ج) كم عددا فرديا (في هذه الأعداد) ؟

د) كم عددا يقبل القسمة على 5 (divisible by) ؟

هـ) كم عددا أكبر من 72 ؟

و) كم عددا يتكون أي منها من أرقام مختلفة (consists of distinct digits) ؟

ز) كم عددا يحتوي على الرقم 7 ؟

ح) كم عددا لا يحتوي على الرقم 0 ؟

ط) كم عددا أكبر من 101 ولا يحتوي على الرقم 6 ؟

ي) كم عددا أرقامه متزايدة قطعا بالترتيب (its digits are in strictly increasing order) [مثل الأعداد 8 ,147 ,13] ؟

ك) كم عددا صيغتها xyz، حيث $0 \neq x < y \quad \& \quad y > z$ ؟

٣-١٢ أ) كم عدد الطرق التي يمكن بها لشهور مواليد (months of the birthdays) خمسة أشخاص أن تكون مختلفة عن بعضها البعض ؟

ب) كم عدد الاحتمالات / الإمكانيات (possibilities) الموجودة لشهور مواليد خمسة أشخاص ؟

[ملاحظة: لا يُشترط أن تكون الشهور مختلفة عن بعضها البعض].

ج) كم عدد طرق اتفاق شخصين على الأقل (at least two people) من بين خمسة أشخاص في الميلاد في الشهر نفسه (have their birthdays in the same month) ؟

٣-١٣ نفرض أن لدينا مجموعة كتب مكونة من خمسة كتب مختلفة في علم الحاسوب ، وثلاثة كتب مختلفة في الرياضيات ، وكتابين مختلفين في الآداب.

أ) بكم طريقة (مختلفة) يمكننا ترتيب (arranging) وضع هذه الكتب على أحد الرفوف (shelf) ؟

ب) كم عدد الطرق التي يمكننا بها ترتيب وضع هذه الكتب على أحد الرفوف بشرط وضع كتب علم الحاسوب الخمسة كلها على اليسار وكتابي الآداب كليهما على اليمين ؟

ج) كم عدد الطرق التي يمكننا بها ترتيب وضع هذه الكتب على أحد الرفوف بشرط وضع كتب علم الحاسوب الخمسة كلها على اليسار.

د) كم عدد الطرق التي يمكننا بها ترتيب وضع هذه الكتب على أحد الرفوف بشرط وضع كتب كل علم معين مع بعضها البعض.

هـ) كم عدد الطرق التي يمكننا بها ترتيب وضع هذه الكتب على أحد الرفوف بشرط عدم وضع كتابي الآداب بجوار بعضيهما البعض.

٣-١٤ في بعض صيغ / نسخ (versions) لغة الفورتران يتكون الاسم التعريفي (identifier) من سلسلة (string) من واحد إلى ستة رموز أبجدية عددية (alphanumeric characters) على أن تبدأ السلسلة بحرف (letter). [الرمز الأبجدي العددي هو أحد الرموز: A, B, …, Z, 0, 1, …, 9]. كم عدد الأسماء التعريفية الصالحة (valid identifiers) في لغة الفورتران؟

٣-١٥ نفرض أن X مجموعة مكونة من n عنصر ، وY مجموعة مكونة من m عنصر. كم عدد الدوال من X إلى Y ؟

٣-١٦ نفرض أن لدينا 10 نسخ (copies) من كتاب معين ، ونسخة واحدة من كل من 10 كتب أخرى. كم عدد الطرق التي يمكننا بها اختيار 10 كتب ؟

٣-١٧ كم عدد الحدود (terms) في مفكوك التعبير التالي ؟

(x+y) ( a+b+c) (e+f+g) (h+i)

٣-١٨ كم عدد المجموعات الجزئية (subsets) من مجموعة تحتوي على (2n+1) عنصر ، بحيث تحتوي المجموعة الجزئية على n عنصر أو أقل ؟

٣-١٩ نفرض أن X, Y مجموعتان جزئيتان غير متباعدتين (not disjoint subsets). في هذه الحالة لا يمكننا حساب عدد العناصر في $X \cup Y$ بالعلاقة $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.

اثبت أنه لأي مجموعتين اختياريتين X, Y (arbitrary sets)

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

(ملاحظة: استخدم هذه النتيجة في حل المسائل الأربع التالية)

٣-٢٠ كم عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية (eight-bit strings) التي تبدأ بالسلسلة الجزئية 100 أو التي رقمها الثنائي الرابع (fourth bit) 1؟

٣-٢١ كم عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية التي تبدأ أو تنتهي بالرقم 1 ؟

٣-٢٢ تقوم إحدى اللجان المكونة من ستة أشخاص A, B, C, D, E, F باختيار رئيس وأمين سر وخازن من بين أعضائها.

أ) كم عدد الاختيارات الممكنة التي يكون فيها B رئيسا أو A أمينا للسر ؟

ب) كم عدد الاختيارات الممكنة التي يكون فيها C رئيسا ، أو A مسئولا عن أحد المناصب ؟

٣-٢٣ قُذِفت قطعتا نرد: إحداهما زرقاء والأخرى حمراء. كم عدد النتائج (outcomes) التي تكون فيها القطعة الزرقاء 3 ، أو يكون فيها المجموع زوجيا (even sum) ؟

٣-٢٤ أ) كم عدد المؤثرات الثنائية (binary operators) على المجموعة $\{1, 2, \cdots, n\}$ ؟

ب) كم عدد المؤثرات الثنائية التبادلية (commutative) على المجموعة $\{1, 2, \cdots, n\}$ ؟

٣-٢٥ كم عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية التي تبدأ بالرقم 0 وتنتهي بالثلاثة أرقام 101؟

٣-٢٦ كم عدد الطرق التي يمكننا بها اختيار ثلاثة كتب في ثلاثة موضوعات مختلفة (different subjects) من بين مجموعة الكتب التالية:

6 كتب مختلفة في التاريخ

9 كتب مختلفة في الرياضيات

7 كتب مختلفة في القانون

4 كتب مختلفة في التربية

٣-٢٧ كم عدد الدوال من مجموعة مكونة من n عنصر غامرة / على (onto) المجموعة $\{0, 1\}$ ؟

٣-٢٨ تقوم لجنة مكونة من سبعة أشخاص G, H, I, J, K, L, M باختيار رئيس ونائب رئيس ومسئول للأنشطة الاجتماعية وأمين سر وخازن. كم عدد الطرق التي يمكن بها اختيار مسئولين لهذه المناصب بحيث يكون G أمينا للسر أو لا يكون مسئولا عن أي منصب.

## ثانيا: التبديلات والتوافقات

٣-٢٩ أ) كم عدد تبديلات a, b, c, d ؟

ب) اكتب تبديلات a, b, c, d.

ج) كم عدد تبديلات 3- للعناصر a, b, c, d ؟

د) اكتب تبديلات 3- للعناصر a, b, c, d.

هـ) كم عدد التبديلات التي يمكن تكوينها من 11 عنصر مختلف ؟

و) كم عدد تبديلات 5- التي يمكن تكوينها من 11 عنصر مختلف ؟

٣-٣٠ أ) بكم طريقة يمكننا اختيار رئيس ونائب رئيس ومسجل من مجموعة مكونة من 11 شخص ؟

ب) بكم طريقة يمكننا اختيار رئيس ونائب رئيس وأمين سر وخازن من مجموعة مكونة من 12 شخص ؟

ج) اشترك 12 فرسا / حصانا (horses) في سباق للخيل. بكم طريقة مختلفة يمكنها إنهاء السباق بالترتيب: الأول (Win) ، والثاني (Place) ، والثالث (Show) ؟

٣-٣١ كم عدد السلاسل (strings) التي يمكن تكوينها بترتيب (ordering) الحروف A, B, C, D, E بشرط:

أ) أن تحتوي على السلسلة الجزئية ACE.

ب) أن تحتوي على الحروف الثلاثة A, C, E مجتمعة معا بأي ترتيب.

ج) أن تحتوي على السلسلتين الجزئيتين DB, AE.

د) أن تحتوي إما على السلسلة الجزئية AE أو على السلسلة الجزئية EA.

هـ) أن تظهر A قبل D [مثل BCAED, BCADE].

و) ألا تحتوي على أي من السلسلتين AB, CD.

ز) ألا تحتوي على أي من السلسلتين AB, BE.

ح) أن تظهر A قبل C ، وأن تظهر C قبل E.

ط) أن تحتوي إما على السلسلة الجزئية DB أو على السلسلة الجزئية BE.

٣-٣٢ عندنا عدد من الأشخاص ينتمون إلى ثلاث فرق: M, V, J.

أ) بكم طريقة يمكن لخمسة أفراد M وعشرة V وثمانية J أن يصطفوا (أي يقفوا في صف) بحيث لا يقف اثنان M معاً (أي بجوار بعضيهما البعض) ؟

ب) بكم طريقة يمكن لخمسة M وخمسة J أن ينتظموا في صف ؟

ج) بكم طريقة يمكن لخمسة M وخمسة J أن يجلسوا حول مائدة مستديرة ؟

د) بكم طريقة يمكن لخمسة M وخمسة J أن يجلسوا حول مائدة مستديرة بشرط ألا يجلس اثنان M بجوار بعضيهما البعض ؟

هـ) بكم طريقة يمكن لخمسة M وثمانية J أن يجلسوا حول دائرة مستديرة بشرط ألا يتجاور اثنان M ؟

٣-٣٣ نفرض أن لدينا المجموعة $X = \{a, b, c, d\}$.

أ) احسب عدد توافقات -3 للمجموعة X.

ب) اكتب توافقات -3 للمجموعة X.

ج) وضِّح العلاقة بين تبديلات -3 وتوافقات -3 للمجموعة X ، وذلك برسم شكل يوضح هذه العلاقة (شبيه بالشكل المرسوم بعد نظرية ٣-٣).

٣-٣٤ أ) بكم طريقة يمكننا اختيار لجنة من ثلاثة أشخاص من بين مجموعة مكونة من 11 شخص ؟

ب) بكم طريقة يمكننا اختيار لجنة من أربعة أشخاص من بين مجموعة مكونة من 12 شخص ؟

ج) بكم طريقة يمكننا اختيار ستة أعداد (بأي ترتيب) من بين مجموعة مكونة من 44 عدد ؟

د) بكم طريقة يمكننا اختيار ستة أعداد من بين مجموعة مكونة من 48 عدد ؟

**٣-٣٥ نفرض أن الهيئة الإدارية لاتحاد الطلبة بالجامعة تتكون من ستة طلاب وسبع طالبات. بكم طريقة يمكننا تشكيل لجنة من بين أعضاء الهيئة الإدارية بحيث**

**أ) تتكون اللجنة من خمسة أشخاص.**

**ب) تتكون اللجنة من ثلاثة طلاب وأربع طالبات.**

**ج) تتكون اللجنة من أربعة أشخاص من بينهم طالبة واحدة على الأقل.**

**د) تتكون اللجنة من أربعة أشخاص من بينهم طالب واحد على الأكثر.**

**هـ) تتكون اللجنة من أربعة أشخاص على أن تضم طلبة من الزوجين الذكر والأنثى (أي من الطلاب والطالبات).**

**و) تتكون اللجنة من أربعة أشخاص بحيث لا تضم أسامة وعمرو مجتمعين.**

**٣-٣٦ بكم طريقة يمكننا تكوين سرية من أربعة فدائيين من كتائب عز الدين القسام ، وثلاثة من كتائب سرايا القدس ، واثنين من كتائب شهداء الأقصى وذلك من بين مجموعة من** 10 **فدائيين من كتائب عز الدين القسام ، و**12 **من كتائب سرايا القدس ، وأربعة من كتائب شهداء الأقصى ، وذلك للقيام بعملية فدائية في أرض الإسراء ضد اليهود لإخراجهم من حيث أخرجونا ؟**

**٣-٣٧ أ) كم عدد السلاسل المكونة من ثمانية أرقام ثنائية** (eight-bit strings) **والتي تحتوي كل سلسلة منها على ثلاثة أصفار بالضبط (مثل السلسلة** 10011101) **؟**

**ب) كم عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية** (eight-bit strings) **التي تحتوي كل منها على ثلاثة أصفار متعاقبة** (consecutive) **[يقال لها أيضا: "صف من ثلاثة أصفار"** (three 0’s in a row)**] وخمسة آحاد (مثل** 11000111, 00011111) **؟**

**ج) كم عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية التي تحتوي أي منها على صفرين – على الأقل – متعاقبين ؟**

**٣-٣٨ نفرض أن لدينا مجموعة أوراق اللعب المعتادة المكونة من** 52 **ورقة / بطاقة** (ordinary 52-card deck)**. كم عدد طرق اختيار خمس أوراق (غير مرتبة)**

في يد لاعب [(unordered) five-card poker hands] من بين الـ 52 ورقة بحيث:

أ) تحتوي الأوراق على أربعة آحاد (four aces).

ب) تحتوي الأوراق على أربع أوراق من نوع (kind) معين ، أي أربع أوراق من الفئة نفسها (same denomination).

ج) تحتوي أوراقا جميعها من نقش البستوني (spades).

د) تحتوي أوراقا من نقشين بالضبط (exactly two suits).

هـ) تحتوي أوراقا من جميع النقشات (cards of all suits).

و) تكون الأوراق الخمس هي: A, 2, 3, 4, 5 ، وتكون جميعها من النقش نفسه (of the same suit).

ز) تكون الأوراق الخمس متعاقبة (consecutive) [بفرض أن الواحد (ace) هو أقل فئة (denomination)] ومن النقش نفسه (of the same suit).

ح) تكون الأوراق الخمس متعاقبة.

ط) تحتوي الأوراق على ورقتين من فئةٍ (denomination) ما ، وورقتين من فئة أخرى ، وورقة من فئة ثالثة.

٣-٣٩ نفرض أن لدينا مجموعة أوراق اللعب المعتادة المكونة من 52 ورقة. كم عدد طرق اختيار 13 ورقة (غير مرتبة) [في لعبة "البريدج"] [(unordered) 13-card bridge hands] من بين الـ 52 ورقة بحيث:

أ) ليس هناك أي شروط على الـ 13 ورقة.

ب) تكون الأوراق جميعها من النقش نفسه (same suit).

ج) تحتوي أوراقا من نقشين بالضبط (exactly two suits).

د) تحتوي الأوراق على الأربعة آحاد جميعها (contain all four aces).

هـ) تحتوي الأوراق على خمس أوراق من النقش البستوني (spades) ، وأربع من النقش القلبي (hearts) ، وثلاث من النقش الاسباتي (clubs) ، وورقة واحدة من النقش الديناري (المعين) (diamond).

و) تحتوي الأوراق على خمس أوراق من نقش معين (one suit) وأربع من نقش آخر ، وثلاث من نقش ثالث ، وورقة واحدة من النقش الرابع.

ز) تحتوي الأوراق على أربع أوراق من كلٍّ من ثلاثة نقشات (3 suits) وورقة واحدة من النقش الرابع.

ح) لا تحتوي الأوراق على أي ورقة / بطاقة وجه (face card) [بطاقة وجه: هي أي بطاقة من 10, J, Q, K, A].

٣-٤٠ نفرض أن قطعة نقدية (coin) ذات الوجهين: H(ead) & T(ail) قد قُذِفت (flipped / tossed) 10 مرات.

أ) كم عدد النتائج الممكنة (possible outcomes) ؟ [الناتج / النتيجة (outcome) الواحدة هي قائمة (list) مخرجات/نتائج العشر قذفات ، مثل:

H H T H T H H H T H

ب) كم عدد النتائج التي تحتوي أي منها على ثلاثة H بالضبط (exactly) ؟

ج) كم عدد النتائج التي تحتوي أي منها على ثلاثة H على الأكثر (at most) ؟

د) كم عدد النتائج التي تحتوي أي منها على H في القذفة الخامسة ؟

هـ) كم عدد النتائج التي تحتوي أي منها على العدد نفسه من H, T ؟

٣-٤١ تتكون إحدى الشحنات (shipments) من 50 جهاز مشغِّل دقيق (microprocessor) من بينها أربعة أجهزة معيبة (defective).

أ) بكم طريقة يمكننا اختيار مجموعة من أربعة أجهزة (من بين الـ 50 جهازا) ؟

ب) بكم طريقة يمكننا اختيار مجموعة من أربعة أجهزة غير معيبة (nondefective) ؟

ج) بكم طريقة يمكننا اختيار مجموعة من أربعة مشغلات دقيقة من بينها اثنان بالضبط (exactly two) معيبان ؟

د) بكم طريقة يمكننا اختيار مجموعة من أربعة مشغلات دقيقة من بينها جهاز واحد على الأقل (at least) معيب ؟

٣-٤٢ أ) اثبت أن عدد سلاسل الرموز الثنائية (bit strings) التي طول أي منها n ، حيث $n \geq 4$ ، والتي تحتوي أي منها على السلسلة الجزئية 10 مرتين بالضبط يساوي $C(n+1, 5)$.

ب) اثبت أن عدد سلاسل الرموز الثنائية التي طول أي منها n رمزا (n-bit strings) ، والتي تحتوي أي منها على k صفرا بالضبط (exactly k 0's) ليس بينها أي صفرين متعاقبين (no two consecutive zeros) يساوي $C(n-k+1, k)$.

٣-٤٣ اثبت أن حاصل ضرب أي عدد صحيح موجب والأعداد الصحيحة التي تليه والتي عددها k-1 عددا (its k-1 successors) يقبل القسمة على (divisible by) k !.

٣-٤٤ نفرض أن لدينا عناصر عددها n ، منها r عنصر مختلفة (distinct) عن بعضها البعض ، والعناصر الباقية وعددها n-r جميعها متطابقة (identical). اعط برهانا (آخر) للعلاقة

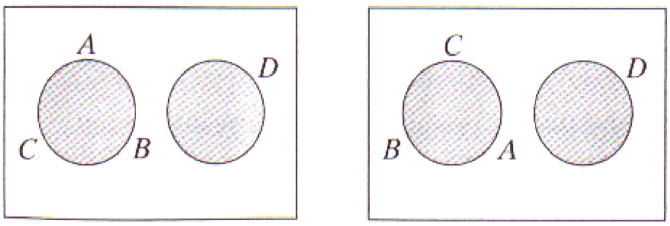
$$P(n, r) = r!\ C(n, r)$$

وذلك عن طريق عَدِّ (counting) الطرق المختلفة لترتيب (number of orderings) هذه العناصر جميعها (التي عددها n) بكيفيتين مختلفتين ، ثم مساواة النتيجتين. وهاتان الكيفيتان هما:

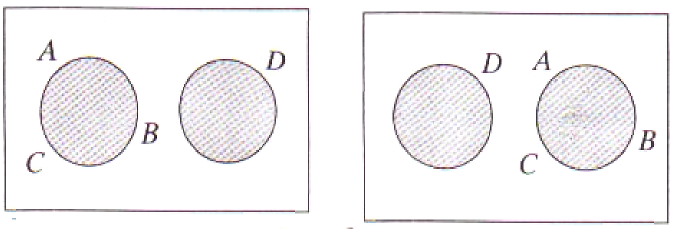
الأولى: أوجد بكم طريقة مختلفة يمكننا ترتيب جميع العناصر مبتدئين باختيار مواضع للعناصر المختلفة التي عددها r عنصرا (count the orderings by first choosing positions for the r distinct objects).

الثانية: أوجد بكم طريقة مختلفة يمكننا ترتيب جميع العناصر مبتدئين باختيار مواضع للعناصر المتطابقة التي عددها n-r عنصرا (by first choosing positions for the n-r identical objects).

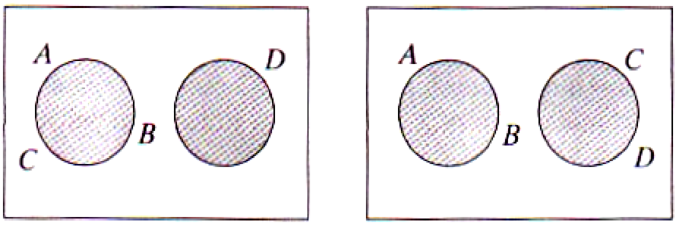
٣-٤٥ نفرض أن $s_{n,k}$ ترمز إلى عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها لأشخاص عددهم n أن يجلسوا حول موائد مستديرة (round tables) عددها k ، على أن يجلس شخص واحد على الأقل حول أي مائدة. [يُطلَق على الأعداد $s_{n,k}$: "أعداد سترلنج من النوع الأول" (Stirling numbers of the first kind)] ولا يؤخذ ترتيب (ordering) الموائد في الاعتبار ، بينما يؤخذ ترتيب جلوس الأشخاص (seating arrangement) حول أي مائدة في الاعتبار باستثناء التدوير (except for rotations). ولتوضيح ذلك ببعض الأمثلة فكل زوج (pair) من الأشكال التالية يبين إن كانت طريقتا جلوس أربعة أشخاص A, B, C, D حول مائدتين مستديرتين تعتبران مختلفتين (distinct) أم لا.



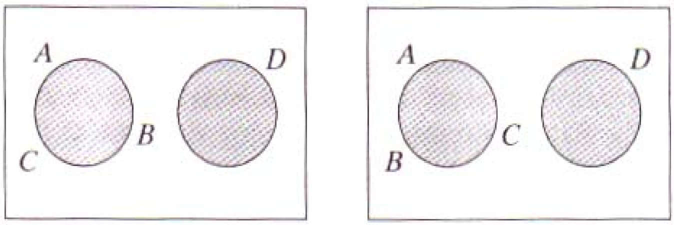

(أ) طريقتان غير مختلفتين




(ب) طريقتان غير مختلفتين




(ج) طريقتان مختلفتان




(د) طريقتان مختلفتان

أ) اثبت أن $s_{n,k} = 0$ إذا كان $k > n$.

ب) اثبت أن $s_{n,n} = 1$ لجميع قيم $n$ حيث $n \geq 1$.

ج) اثبت أن $\forall n \geq 1 \qquad s_{n,1} = (n-1)!$.

د) اثبت أن $\forall n \geq 2 \qquad s_{n,n-1} = C(n,2)$

هـ) اثبت أن $\forall n \geq 2 \quad s_{n,2} = (n-1)!\ (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1})$.

و) اثبت أن $\forall n \geq 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n!$.

ز) أوجد صيغة للمقدار $n \geq 3$, $s_{n,n-2}$ واثبت صحتها.

٣-٤٦ نفرض أن $S_{n,k}$ ترمز إلى عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها تجزئة (partitioning) مجموعة (set) مكوَّنة من $n$ عنصر إلى مجموعات جزئية غير خالية (nonempty subsets) عددها $k$ بالضبط. ولا يؤخذ في الاعتبار ترتيب المجموعات الجزئية (order of subsets). [يطلَق على $S_{n,k}$: "أعداد سترلنج من النوع الثاني" (Stirling numbers of the second kind)].

أ) اثبت أن $S_{n,k} = 0$ إذا كان $k > n$.

ب) اثبت أن $\forall n \geq 1 \quad S_{n,n} = 1$.

ج) اثبت أن $\forall n \geq 1 \quad S_{n,1} = 1$.

د) اثبت أن $S_{3,2} = 3$.

هـ) اثبت أن $S_{4,2} = 7$.

و) اثبت أن $S_{4,3} = 6$.

ز) اثبت أن $\forall n \geq 2 \quad S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$.

ح) اثبت أن $\forall n \geq 2 \quad S_{n,n-1} = C(n, 2)$.

ط) أوجد صيغة للمقدار $n \geq 3 \quad S_{n,n-2},$ واثبت صحتها.

ي) اثبت أن عدد علاقات التكافؤ (equivalence relations) على أي مجموعة مكونة من n عنصر يساوي

$$\sum_{k=1}^{n} S_{n,k}$$

٣-٤٧ كم عدد السلاسل (strings) المختلفة التي يمكن تكوينها (forming) عن طريق ترتيب (ordering) الحروف A, B, C, D, E, F بشرط ظهور A قبل C وكذلك ظهور E قبل C ؟

٣-٤٨ كم عدد الطرق المختلفة لاختيار ست أوراق لعب (six-card hands) من بين مجموعة أوراق اللعب المعتادة المكونة من 52 ورقة (ordinary 52-card deck) بحيث تكون ثلاث أوراق منها من نَقْش (suit) معين ، والثلاث أوراق الأخرى من نقش آخر ؟

٣-٤٩ تحتوي إحدى شحنات (shipments) الأقراص المضغوطة / المدمجة (compact disks) والمكونة من 100 قرص على خمسة أقراص معيبة (defective). بكم طريقة يمكننا اختيار مجموعة مكونة من أربعة أقراص بحيث تكون الأقراص المعيبة فيها أكثر من الأقراص السليمة / غير المعيبة (nondefective) ؟

## ثالثا: معاملات ذات الحدين والمتطابقات التوافقية

٣-٥٠ باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد مفكوك

أ) $(x+y)^4$ ب) $(2c-3d)^5$

٣-٥١ في كل مما يلي أوجد معامل (coefficient) الحد (term) المذكور حينما نحصل على مفكوك (expansion) التعبير المعطَى:

أ) $x^4y^7;\ (x+y)^{11}$

ب) $s^6t^6;\ (2s-t)^{12}$

ج) $x^2y^3z^5;\ (x+y+z)^{10}$

د) $w^2x^3y^2z^5;\quad (2w+x+3y+z)^{12}$

هـ) $a^2x^3;\quad (a+x+c)^2\ (a+x+d)^3$

و) $a^2x^3;\quad (a+ax+x)\ (a+x)^4$

ز) $a^3x^4;\quad (a+\sqrt{ax}+x)^2\ (a+x)^5$

٣-٥٢ أوجد عدد الحدود في مفكوك كل من التعابير التالية:

أ) $(x+y+z)^{10}$

ب) $(w+x+y+z)^{12}$

ج) $(x+y+z)^{10}(w+x+y+z)^2$

٣-٥٣ في مثلث باسكال (Pascal's triangle) أوجد الصف التالي (next row) للصف

1 7 21 35 35 21 7 1

٣-٥٤ أ) اثبت أن

$$C(n,k)\ <\ C(n,k+1)\quad \text{iff}\quad k<(n-1)/2$$

ب) استخدم الجزء أ) لاستنتاج أن القيمة العظمى للمقدار

$C(n, k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$

هي $C(n, \lfloor n/2 \rfloor)$

٣-٥٥ باستخدام نظرية ذات الحدين اثبت أن

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n, k)$$

٣-٥٦ أوجد معامل $x^3yz^4$ في مفكوك $(2x + y + z)^8$ .

٣-٥٧ اثبت نظرية ٣-٥ أي العلاقة

$$C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)\,; \qquad 1 \le k \le n$$

باستخدام نظرية ٣-٣ أي باستخدام العلاقة

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r\,!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r\,!} = \frac{n\,!}{(n-r)\,!\ r\,!}, \quad r \le n$$

٣-٥٨ باستخدام برهان توافيقي (combinatorial argument) اثبت أن

$$C(n, k) = C(n, n-k)$$

٣-٥٩ أوجد صيغة للمجموع

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + (n-1)n$$

٣-٦٠ باستخدام المعادلة $\sum_{i=k}^{n} C(i, k) = C(n+1, k+1)$ أوجد صيغة للمجموع

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

٣-٦١ باستخدام نظرية ذات الحدين اثبت أن

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k C(n, k) = 3^n$$

٣-٦٢ نفرض أن n عدد زوجي. اثبت أن

$$\sum_{k=0}^{n/2} C(n, 2k) = 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n/2} C(n, 2k-1)$$

٣-٦٣ أ) اثبت أن

$$(a+b+c)^n = \sum_{0 \le i+j \le n} \frac{n\,!}{i\,!\ j\,!\,(n-i-j)\,!}\, a^i b^j c^{n-i-j}$$

ب) استخدم الجزء أ) لكتابة مفكوك $(x + y + z)^3$ .

٣-٦٤ اثبت أن

$$3^n = \sum_{0 \le i+j \le n} \frac{n\,!}{i\,!\ j\,!\,(n-i-j)\,!}$$

٣-٦٥ أ) اثبت أن

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C(n, k)kx^{k-1}$$

ب) استخدم النتيجة في أ) لإثبات أن

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC(n, k)$$

ج) اثبت بالاستقراء النتيجة المذكورة في ب).

٣-٦٦ استخدم نظرية ذات الحدين لإثبات أن

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}(-1)^k C(n, k) = 1$$

# الفصل الرابع

## المخططات البيانية والأشجار
## Graphs and Trees

**تستخدم نظرية الرسوم / المخططات البيانية** (graph theory) **في الوقت الحالي في تطبيقات عديدة في مجالات متنوعة تشمل علم الحاسوب والكيمياء وبحوث العمليات والهندسة الكهربائية وعلم الاقتصاد واللغويات.**

### أولا: المخططات البيانية
### Graphs

**تعريف:**

**المخطط البياني (غير الموجَّه)** [(undirected) graph] **يتكون من مجموعة** V **من الرؤوس / العُقَد** (vertices / nodes) **، ومجموعة** E **من الأحرف / الأضلاع / الأقواس** (edges / arcs) **، بحيث أن أي حرف** $e \in E$ **يكون مرتبطا** (associated with) **بزوج غير مرتب** (unordered pair) **من الرؤوس. وإذا وُجد حرف وحيد** e (unique edge) **مرتبط بالرأسين** $v, w$ **، فإننا عادة نكتب** $e = (v, w)$ **أو** $e = (w, v)$ **. وهذا يعني أن** $(v, w)$ **ترمز في هذه الحالة إلى حرف بين** $v, w$ (denotes an edge between) **في مخطط بياني غير مُوَجَّه ، وليس إلى زوج مرتب.**

**والمخطط البياني الموجه** (directed graph) **أو ثنائي البيان** G (digraph) **يتكون من مجموعة** V **من الرؤوس / العُقَد ومجموعة** E **من الأحرف / الأضلاع / الأقواس بحيث أن أي حرف** $e \in E$ **يكون مرتبطا بزوج مرتب من الرؤوس. وإذا وجد حرف وحيد** e **مرتبط بالزوج المرتب** $(v, w)$ **من الرأسين** $v, w$ **، فإننا عادة نكتب** $e = (v, w)$ **. وهذا يرمز إلى حرف متجه من** v **إلى** w (denotes an edge from v to w).

وإذا كان e حرفا في مخطط بياني (موجه أو غير موجه) مرتبطا بالرأسين v, w ، فيُقال إن الحرف e يقع على / يقابل الرأسين v, w (incident on) ، ويقال إن الرأسين v, w يحدثان / يقابلان / يقعان على الحرف (incident on) e ، وإنهما رأسان متجاوران (adjacent vertices).

وإذا كان G مخططا بيانيا (موجها أو غير موجه) رؤوسه V وأحرفه E ، فإننا نكتب G = (V, E).

وعادة نفترض أن المجموعتين E, V محدودتان / منتهيتان (finite) ، وأن المجموعة V غير خالية (nonempty) ، ما لم يُنص على غير ذلك.

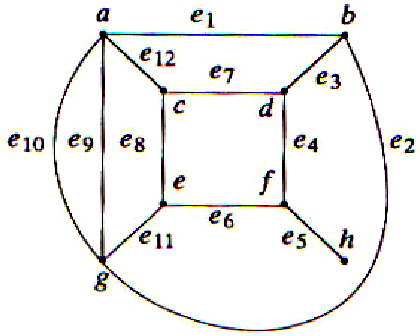
مثال ٤-١:

الشكل التالي يبين مخططا بيانيا (غير موجه) [(undirected) graph] G يتكون من مجموعة الرؤوس

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

ومجموعة الأحرف

$$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_{12}\}$$




ملاحظة:

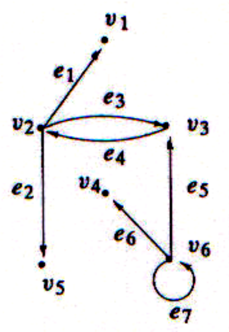
من الناحية العملية التطبيقية مجموعة رؤوس مخطط بياني قد تمثل مجموعة مدن ، ومجموعة أحرف المخطط قد تمثل شبكة الطرق التي تربط / تصل هذه المدن بعضها ببعض.

في الشكل السابق الحرف $e_1$ مرتبط بالزوج غير المرتب {a, b} من الرؤوس ، والحرف $e_4$ مرتبط بالزوج غير المرتب {d, f} من الرؤوس. الحرف $e_1$ يرمز له

هكذا: (a, b) أو (b, a) ، بينما الحرف $e_4$ نرمز له هكذا: (d, f) أو (f, d). الحرف $e_{11}$ يقابل الرأسين e, g ، والرأسان e, g متجاوران.

مثال ٤-٢:

الشكل التالي يبين مخططا بيانيا موجَّها ، حيث يُشار إلى الأحرف الموجهة بأسهم.




الحرف $e_1$ مرتبط بالزوج المرتب $(v_2, v_1)$ من الرؤوس ، والحرف $e_7$ مرتبط بالزوج المرتب $(v_6, v_6)$ من الرؤوس. نرمز للحرف $e_1$ بالاصطلاح $(v_2, v_1)$ وللحرف $e_7$ بالاصطلاح $(v_6, v_6)$.

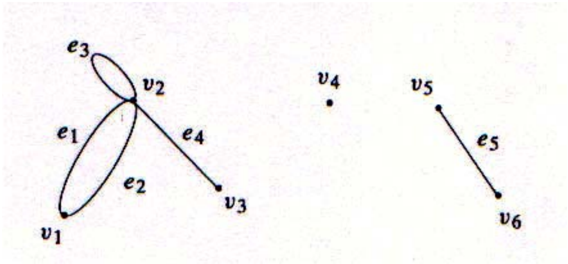
لاحظ أن التعريف السابق للمخطط البياني يسمح بارتباط أحرف مختلفة (distinct edges) بالزوج نفسه من الرؤوس (same pair of vertices). مثلا في المخطط البياني في مثال ٤-١ الحرفان $e_9, e_{10}$ مرتبطان بالزوج $\{a, g\}$.

تعريفات:

- الأحرف المختلفة المرتبطة بالزوج نفسه من الرؤوس يقال لها أحرف متوازية (**parallel edges**).
- الحرف الذي يقابل (incident on) رأسا وحيدة (single vertex) يقال له عروة (**loop**).
- الرأس التي لا تقابل / لا تقع على (incident on) أي حرف يطلق عليها "رأس معزولة" (**isolated vertex**).

مثال ٤-٣:

في المخطط البياني التالي



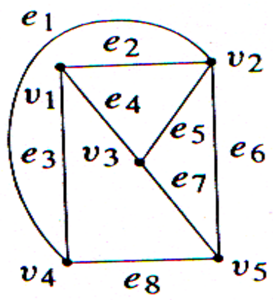

- **الحرفان** $e_1, e_2$ **حرفان متوازيان لأنهما مرتبطان بالزوج نفسه** $\{v_1, v_2\}$ **من الرؤوس.**
- **الحرف** $e_3 = (v_1, v_2)$ **عروة لأنه يقابل الرأس الوحيدة** $v_2$.
- **الرأس** $v_4$ **رأس معزولة لأنها لا تقع على أي حرف.**

**تعريف:**

**المخطط البياني الذي لا يحتوي على أي أحرف متوازية** (parallel edges) **وأي عُرَى** (loops) **يقال له "مخطط بياني بسيط" (simple graph).**

**مثال ٤-٤:**

**المخطط البياني التالي مخطط بسيط لأنه لا يحتوي على أي أحرف متوازية ، وكذلك لا يحتوي على أي عروة.**




**ملاحظة:**

**بعض الكتب لا تسمح بوجود أحرف متوازية أو عُرَى في تعريف المخطط البياني** (graph).

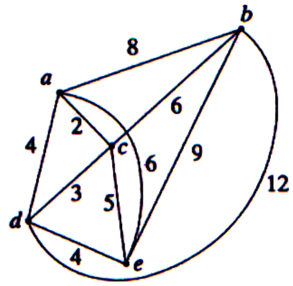
**تعريف:**

**المخطط البياني الذي يحتوي على أعداد** (numbers) **مكتوبة على أحرفه يطلَق عليه "مخطط بياني موزون" (weighted graph) والعدد** k **المكتوب على**

حرفٍ ما e يطلق عليه "وزن الحرف e" (weight of the edge e). ومعنى هذه الأوزان – من الناحية العملية التطبيقية – يختلف على حسب التطبيق المستخدم فيه المخطط البياني. فمثلا إن كان المخطط يمثل شبكة مدن والطرق التي بينها فقد يعني وزن الحرف الوقت المستغرق لقطع مسافة هذا الطريق (الحرف) الذي يصل بين المدينتين (الرأسين) اللتين تقعان عليه.

**مثال ٤–٥:**

الشكل التالي يبين مخططا بيانيا موزونا.




في هذا المخطط نرى أن وزن الحرف (c, e) يساوي 5.

**تعريف:**

في أي مخطط بياني إذا بدأنا عند رأسٍ ما $v_0$ وانتقلنا (travel) عَبْر حرف (along an edge) إلى الرأس $v_1$ ، ثم انتقلنا عبر حرف آخر إلى الرأس $v_2$ ، وهكذا إلى أن نصل (arrive) أخيرا إلى الرأس $v_n$ ، فإننا نسمِّي الرحلة الكاملة (complete tour) **مسارا / ممرا (a path) من $v_0$ إلى $v_n$**.

**وطول المسار (length of a path)** هو مجموع أوزان أحرف المسار (sum of the weights of the edges in the path). فمثلا في مخطط المثال السابق (مثال ٤–٥) طول المسار الذي يبدأ عند a ، ويزور c (visits) وينتهي (terminates) عند b يساوي 8.

وإذا كان المخطط البياني يمثل عمليا شبكة المدن والطرق التي تصل بينها ، وكان وزن أي حرف يمثل الوقت اللازم للانتقال عبر الطريق المقابل ، فإن طول المسار الذي يبدأ عند رأسٍ ما $v_1$ ثم يزور الرؤوس $v_2, v_3, \cdots$ بهذا الترتيب إلى أن ينتهي عند الرأس $v_n$ يمثل الوقت اللازم للبدء عند المدينة $v_1$ ثم زيارة

**المدن** $v_2, v_3, \cdots$ **بهذا الترتيب إلى أن ننتهي عند المدينة** $v_n$ **. والمسار الذي يعطي أقل طول ممكن** (a path of minimum length) **بحيث يزور كل رأس** (visits every vertex) **في المخطط مرة واحدة بالضبط** (exactly one time) **يطلق عليه / يمثل المسار الأمثل (optimal path) للاتباع** (to follow).

**مثال ٤-٦:**

**في المخطط البياني المعطَى في المثال السابق (مثال ٤-٥) نفرض أن المطلوب أن نبدأ عند الرأس** a **وننتهي عند الرأس** e **بحيث نزور جميع الرؤوس في المخطط مرة واحدة بالضبط. أوجد المسار الأمثل ، أي المسار ذا أقل طول ممكن** (minimum-length path).

**الحل:**

**يمكننا إيجاد المسار الأمثل بأن نكتب جميع المسارات الممكنة** (all possible paths) **من** a **إلى** e **والتي تمر بكل رأس** (every vertex) **مرة واحدة بالضبط** (exactly one time) **ثم نختار أقصرها** (shortest one). **الجدول التالي يعطي جميع هذه المسارات وطول كل منها.**

| المسار<br>Path | الطول<br>Length |
|---|---|
| a, b, c, d, e | 21 |
| a, b, d, c, e | 28 |
| a, c, b, d, e | 24 |
| a, c, d, b, e | 26 |
| a, d, b, c, e | 27 |
| a, d, c, b, e | 22 |

**ومن الجدول نرى أن المسار الأول الذي يزور الرؤوس** a, b, c, d, e **بهذا الترتيب هو المسار الأمثل ، حيث أن طوله** (21) **هو أقل طول ممكن. وبالطبع إذا اختلف رأسا الابتداء والانتهاء** (starting and ending vertices) **فقد نحصل على مسار أقصر من هذا المسار.**

**واضح أن طريقة كتابة أو دراسة جميع المسارات الممكنة من الرأس** v **إلى الرأس** w **– كما فعلنا في المثال السابق (مثال ٤-٦) – للوصول إلى المسار الأمثل (أي إلى المسار ذي أقل طول ممكن) من** v **إلى** w **والذي يزور كل رأس مرة**

واحدة بالضبط طريقة تستغرق وقتا طويلا (time consuming way) وللأسف لا توجد للآن طريقة عملية (practical) أفضل تعطي نتائج أسرع لأي مخطط بياني اختياري.

* * *

فيما يلي نعرِّف أنواعا خاصة من المخططات البيانية (special graphs) التي تظهر كثيرا عند دراسة نظرية المخططات البيانية (graph theory).

**تعريف:**

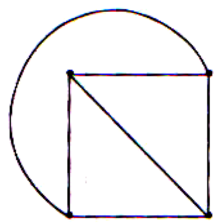
**المخطط البياني التام $K_n$ على عدد n من الرؤوس**

**(The complete graph $K_n$ on n vertices)**

هو المخطط البياني البسيط الذي يتكون من n رأس بحيث يوجد حرف (edge) بين أي زوج من رأسين مختلفين (every pair of distinct vertices).

**مثال ٤-٧:**

الشكل التالي يعطي المخطط البياني التام على أربعة رؤوس $K_4$.



**تعريف:**

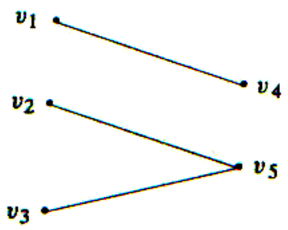
يقال للمخطط البياني $G = (V, E)$ إنه **"ثُنائي الفَرْع" (bipartite)** إذا وُجِدت مجموعتان جزئيتان $V_1, V_2$ من V [قد تكون إحداهما خالية (empty)] بحيث أن

$$V_1 \cap V_2 = \phi , \quad V_1 \cup V_2 = V$$

وأي حرف في E يقابل (incident on) رأسا من $V_1$ ورأسا من $V_2$.

**مثال ٤-٨:**

الشكل التالي يعطي مخططا بيانيا ثنائي الفرع




وذلك لأننا إذا فرضنا أن

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\} \quad \& \quad V_2 = \{v_4, v_5\}$$

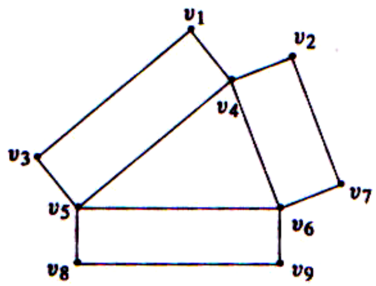
فكل حرف في المخطط سيقابل رأسا $V_1$ من ورأسا من $V_2$.

ملاحظة:

تعريف المخطط ثنائي الفرع ينص على أنه إذا كان e حرفا في المخطط فإنه يقابل رأسا في $V_1$ وأخرى في $V_2$، ولا ينص على أنه إذا كان $v_1$ رأسا في $V_1$، و$v_2$ رأسا في $V_2$ فإنه يوجد حرف بين $v_1, v_2$. مثلا مخطط مثال ٤-٨ مخطط ثنائي الفرع لأن أي حرف يقابل رأسا في $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ وأخرى في $V_2 = \{v_4, v_5\}$. ولكن المخطط لا يحتوي على جميع الأحرف بين الرؤوس في $V_1$ والرؤوس في $V_2$. مثلا الحرف $(v_1, v_5)$ غير موجود.

مثال ٤-٩:

اثبت أن المخطط البياني المبين في الشكل التالي ليس مخططا ثنائي الفرع.




الحل:

سنثبت أن المخطط ليس ثنائي الفرع بالتناقض (by contradiction).

نفـرض أن المخطـط ثنـائي الفـرع. وبالتـالي يمكـن تقسـيم / تجزئـة (partitioning) مجموعـة رؤوس المخطـط إلى مجمـوعتين جـزئيتين $V_1, V_2$ بحيث أن أي حرف يقابل رأسا من $V_1$ ورأسا من $V_2$. إذا نظرنا إلى الرؤوس $v_4, v_5, v_6$ ، فنظرا لأن الرأسين $v_4, v_5$ متجاوران (adjacent) فيجب أن يكون أحدهما في $V_1$ والآخر في $V_2$. نفرض أن $v_4$ في $V_1$ وأن $v_5$ في $V_2$. ونظرا لأن $v_5, v_6$ متجاوران ، و $v_5$ في $V_2$ فيجب أن يكون $v_6$ في $V_1$. وبالمثل نظرا لأن $v_4, v_6$ متجاوران ، و$v_4$ في $V_1$ فيجب أن يكون $v_6$ في $V_2$. وبالتالي نصل إلى الاستنتاج أن $v_6$ في كل من $V_1, V_2$ وهذا تناقض لأن $V_1, V_2$ متباعدتان (disjoint). وبالتالي فالشكل المعطَى ليس مخططا ثنائي الفرع.

مثال ٤-١٠:

المخطط البياني التام $K_1$ على رأس واحد يُعَدُّ مخططا ثنائي الفرع. يمكننا فرض أن $V_1$ هي المجموعة التي تحتوي على الرأس الوحيد ، و $V_2$ هي المجموعة الخالية. وبالتالي فإن أي حرف (فعليا لا يوجد !) يقابل رأسا في $V_1$ ورأسا في $V_2$.

تعريف:

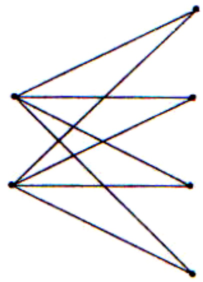
**المخطط البياني التام ثنائي الفرع $K_{m,n}$ على عددين m, n من الرؤوس**

**(The complete bipartite graph $K_{m,n}$ on m and n vertices)**

هو المخطط البياني البسيط الذي يمكن تجزئة (partitioning) مجموعة رؤوسه إلى مجموعتين: $V_1$ وبها عدد m من الرؤوس ، و $V_2$ وبها عدد n من الرؤوس ، بحيث يوجد حرف بين أي زوج $v_1, v_2$ من الرؤوس ، حيث $v_1$ تنتمي إلى $V_1$ ، و$v_2$ تنتمي إلى $V_2$.

مثال ٤-١١:

الشكل التالي يعطي المخطط البياني التام ثنائي الفرع $K_{2,4}$ على اثنين وأربعة من الرؤوس.



## ثانيا: المسارات والدورات
## Paths and Cycles

ذكرنا سابقا تعريفا مبدئيا بسيطا للمسار ومعناه ، وفيما يلي نعطي تعريفا أدق / تعريفا شكليا (/رسميا) (formal definition) له:

**تعريف:**

نفرض أن $v_0, v_n$ رأسان في مخطط بياني. **المسار (path)** من $v_0$ إلى $v_n$ الذي طوله n هو أي متتالية متناوبة (alternating sequence) من رؤوس عددها n+1 وأحرف عددها n تبدأ بالرأس $v_0$ وتنتهي بالرأس $v_n$ :

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, v_{n-1}, e_n, v_n)$$

حيث الحرف $e_i$ يقابل الرأسين $v_{i-1}, v_i$ وذلك للقيم $i = 1, 2, \cdots, n$. معنى هذا التعريف أننا نبدأ عند الرأس $v_0$ ثم نذهب عبر الحرف $e_1$ إلى الرأس $v_1$ ، ثم نذهب عبر الحرف $e_2$ إلى الرأس $v_2$ ، وهكذا إلى أن ننتهي عند الرأس $v_n$ .

مثال ٤-١٢:

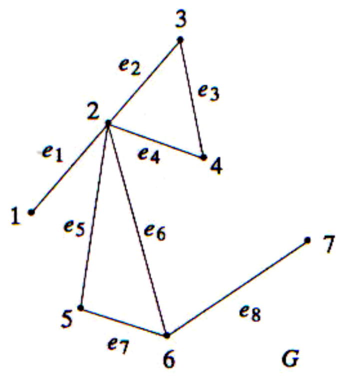
في المخطط البياني G التالي

(أ) $(1, e_1, 2, e_2, 3, e_3, 4, e_4, 2)$

هو مسار طوله 4 من الرأس 1 إلى الرأس 2.

(ب) $(6)$

هو مسار طوله 0 من الرأس 6 إلى الرأس 6 ، أي أنه مسار يتكون فقط من الرأس 6.




**ملاحظة:**

**في حالة عدم وجود أحرف متوازية** (parallel edges) **في المخطط البياني يمكننا أن نشير إلى المسار بذكر الرؤوس فقط دون الأحرف (أي نحذف أسماء الأحرف من تعريف المسار). فمثلا في المثال السابق (مثال ٤-١٢) المسار الأول (أ) يمكن أن يُكتب هكذا:**

$$(1, 2, 3, 4, 2)$$

**تعريف:**

**يقال لمخطط بياني** G **إنه مخطط بياني متصل (connected graph) إذا وُجد مسار** (a path) **بين أي رأسين في المخطط ، أي أنه إذا أُعطينا أي رأسين** v, w **في المخطط** G **فإنه يوجد مسار من** v **إلى** w.

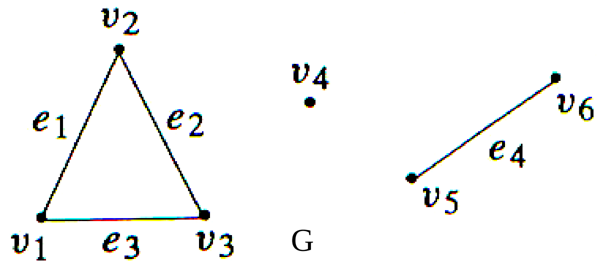
**بأسلوب آخر بسيط المخطط البياني المتصل هو الذي يمكننا فيه الوصول من أي رأس إلى أي رأس أخرى عبر مسار.**

**مثال ٤-١٣:**

**المخطط البياني** G **في المثال السابق (مثال ٤-١٢) مخطط متصل لأنه إذا أُعطينا أي رأسين** v, w **في** G **، فسنجد مسارا من** v **إلى** w.

**مثال ٤-١٤:**

**ب) المخطط البياني** G **في الشكل التالي ليس متصلا** (not connected) ، **لأنه – على سبيل المثال – لا يوجد مسار من الرأس** $v_2$ **إلى الرأس** $v_5$.




**يتضح لنا من المخططين البيانيين السابقين في مثال ٤-١٢ ومثال ٤-١٤ أن المخطط المتصل (كمخطط مثال ٤-١٢) يتكون من "قطعة" واحدة (one piece) ، بينما المخطط غير المتصل (كمخطط مثال ٤-١٤) يتكون من قطعتين أو أكثر. هذه "القطع" عبارة عن مخططات بيانية جزئية (subgraphs) من المخطط البياني الأصلي ، ويُطلَق عليها "مركِّبات" (components). وسنعطي بعد قليل التعريفات الدقيقة لهذه المصطلحات.**

**نستطيع الحصول على مخطط بياني جزئي $G'$ (a subgraph) من مخطط بياني G باختيار أحرف ورؤوس معينة من G بالشرط التالي: إذا اخترنا حرفا e في G يقابل رأسين v, w فيجب أن يشتمل $G'$ على v, w. وهذا الشرط يضمن لنا أن $G'$ سيكون فعلا مخططا بيانيا.**

**تعريف:**

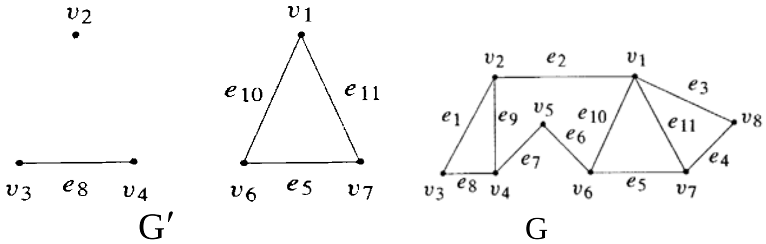
**نفرض أن $G = (V, E)$ مخطط بياني. يُقال إن $(V', E')$ مخطط بياني جزئي (subgraph) من G إذا تحقق الشرطان:**

**(أ)** $V' \subseteq V \,\&\, E' \subseteq E$

**(ب) لأي حرف $e' \in E'$: إذا قابل $e'$ الرأسين $v', w'$ فإن $v', w' \in V'$**

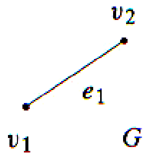
**مثال ٤-١٥:**

**في الشكل التالي المخطط البياني $G' = (V', E')$ يُعَدُّ مخططا بيانيا جزئيا (a subgraph) من المخطط البياني $G = (V, E)$ ، ولذلك لتحقق الشرطين (أ) و(ب) في التعريف السابق للمخطط البياني الجزئي.**




**مثال ٤-١٦:**

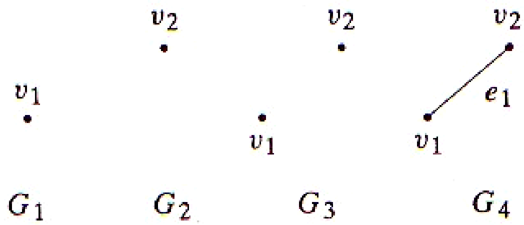
**أوجد جميع المخططات البيانية الجزئية (all subgraphs) من المخطط البياني G المبين في الشكل التالي ، على أن يحتوي أي مخطط جزئي على رأس واحدة على الأقل.**




**الحل:**

i) **إذا لم نختر أي حرف (edge) ، فيمكننا أن نختار إما رأسا واحدة [ $v_1$ أو $v_2$ ] أو الرأسين معا [ $v_1, v_2$ ] ، وبذلك نحصل على ثلاثة مخططات جزئية $G_1, G_2, G_3$ وهي مبينة في الشكل التالي.**

ii) **إذا اخترنا الحرف الوحيد $e_1$ الموجود في المخطط G ، فيجب أن نختار أيضا الرأسين اللتين يقع عليهما $e_1$. وفي هذه الحالة نحصل على المخطط الجزئي $G_4$ المبين في الشكل التالي.**




**المخططات البيانية الجزئية الأربعة من المخطط البياني G**

**تعريف:**

نفــرض أن G مخطــط بيــاني ، ونفــرض أن v رأس في G. المخطــط الجزئــي $G'$ مــن G والــذي يتكــون مــن جميــع أحــرف ورؤوس G الــتي يحتويهـا مسـارٌ مـا يبـدأ عنـد v يطلـق عليـه مركِّبـة **G** الـتي تحتـوي علـى **v** **(component of G containing v)**.

مثال ٤-١٧:

المخطط G في مثال ٤-١٢ له مركبة واحدة هي المخطط G نفسه. وأي مخطط يكون متصلا إذا وفقط إذا كان له مركبة واحدة بالضبط.

مثال ٤-١٨:

نفرض أن G هو المخطط المبين في مثال ٤-١٤. مركبة G التي تحتوي على $v_3$ هي المخطط البياني الجزئي

$$G_1 = (V_1, E_1), \quad V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$$

ومركبة G التي تحتوي على $v_4$ هي المخطط البياني الجزئي

$$G_2 = (V_2, E_2), \quad V_2 = \{v_4\}, \quad E_2 = \phi$$

ومركبة G التي تحتوي على $v_5$ هي المخطط البياني الجزئي

$$G_3 = (V_3, E_3), \quad V_3 = \{v_5, v_6\}, \quad E_3 = \{e_4\}$$

وللحصول على إحدى الخصائص (characterizations) الأخرى لمركبات مخطـط بيـاني $G = (V, E)$ نعـرِّف أولا علاقـة R علـى مجموعـة الـرؤوس V بالقاعدة:

$v_1 \; R \; v_2$ : إذا كان هناك مسار من $v_1$ إلى $v_2$ .

ويمكننا إثبات أن R علاقة تكافؤ على V ، وأنه إذا كانت $v \in V$ فإن مجموعة الرؤوس في المركبة التي تحتوي على v هي طبقة التكافؤ

$$[v] = \{w \in V \mid wRv\}$$

ونلاحظ أن تعريف المسار (path) يسمح بتكرار (repetition) الرؤوس أو الأحرف أو كليهما. فمثلا في مثال ٤-١٢ المسار (1, 2, 3, 4, 2) ظهرت فيه الرأس 2 مرتين.

**ويمكننا الحصول على طبقات جزئية** (subclasses) **من المسارات بمنع تكرار الرؤوس أو الأحرف** (prohibiting duplicate vertices or edges) **، أو بجعل الرأسين** $v_0, v_n$ **في تعريف المسار منطبقين** (identical).

**تعريفات:**

**نفرض أن** v, w **رأسان في مخطط بياني** G.

- **يقال لمسار من** v **إلى** w **إنه "مسار بسيط"** (**a simple path**) **من** v **إلى** w **إذا لم يحتو على أي رؤوس مكررة.**
- **ويقال للمسار الذي طوله لا يساوي صفرا** (nonzero length) **من** v **إلى** v **، ولا يحتوي على أي أحرف مكررة إنه دورة / دائرة / دارة (cycle / circuit).**
- **ويقال للدورة من** v **إلى** v **التي لا تحتوي على أي رؤوس مكررة باستثناء رأسي البداية والنهاية** (beginning and ending vertices) – **وكلاهما يساوي** v – **إنها دورة بسيطة (simple cycle).**

**مثال ٤-١٩:**

**الجدول التالي يعطي معلومات عن بعض المسارات في المخطط البياني** G **المبين في مثال ٤-١٢.**

| اسم المسار | هل هو مسار بسيط ؟ | هل هو دورة ؟ | هل هو دورة بسيطة ؟ |
|---|---|---|---|
| (6,5,2,4,3,2,1) | لا | لا | لا |
| (6,5,2,4) | نعم | لا | لا |
| (2,6,5,2,4,3,2) | لا | نعم | لا |
| (5,6,2,5) | لا | نعم | نعم |
| (7) | نعم | لا | لا |

**والآن ننظر في مسألة محاولة إيجاد دورة** (cycle) **في مخطط بياني** (graph) **تقوم باجتياز** (traversing) **كل حرف** (edge) **في المخطط مرة واحدة بالضبط** (exactly one time).

**تعريف:**

**دورة "أويلـــر" (Euler cycle) هـــي دورة في مخطــط بيـــاني تشـــمل** (includes) **جميع الأحرف وجميع الرؤوس في المخطط ، بحيث تَجتاز الدورة كل حرف في المخطط مرة واحدة بالضبط.**

**تعريف:**

$\delta(v) \equiv$ **درجة رأس** v **في مخطط بياني** G

$(\delta(v) \equiv$ degree of a vertex v in a graph G)

**هي عدد الأحرف التي تقابل** v (incident on).

**ملاحظة:**

**من التعريف نرى أن أي عروة على** v (loop on) **تساهم بـ** 2 **في درجة الرأس** v.

**نظرية ٤-١:**

**إذا احتوى مخطط بياني** G **على دورة أويلر ، فإن** G **يكون مخططا بيانيا متصلا** (connected) ، **ودرجة أي رأس فيه تكون زوجية.**

**البرهان:**

**نفرض أن** G **يحتوي على دورة أويلر. أي أن هناك مسارا من رأسٍ ما** v **إلى** v **يجتاز كل حرف في** G **مرة واحدة بالضبط.**

(i) **لإثبات أن درجة أي رأس في** G **يجب أن تكون زوجية ، نفرض أن هناك رأسا** "t" **درجتها فردية. نظرا لأن هناك دورة أويلر فسنزور** t. **أي مرة نصل فيها إلى** t **عبر حرفٍ ما ، يجب علينا أن نغادرها عبر حرف آخر. وكذلك معلوم أن أي حرف يقابل** t **يجب أن نستخدمه ، أي ننتقل عبره. وهكذا يجب أن تتواجد الأحرف عند** t **في أزواج** (pairs) **[حرف للوصول إلى** t ، **وآخر لمغادرتها]. أي أن عددا زوجيا من الأحرف يجب أن يلاقي** t. **وحيث أن درجة** t **فردية فرضا ، فهناك عدد فردي من الأحرف يلاقي** t. **أي أننا وصلنا إلى تناقض** (contradiction). **وبالتالي فدرجة أي رأس في** G **يجب أن تكون زوجية.**

(ii) إذا كان v, w أي رأسين في G ، فإن الجزء (portion) من دورة أويلر الذي ينقلنا من v إلى w يعتبر مسارا من v إلى w. وبالتالي فإن G مخطط بياني متصل.

**نظرية ٤-٢: (عكس نظرية ٤-١)**

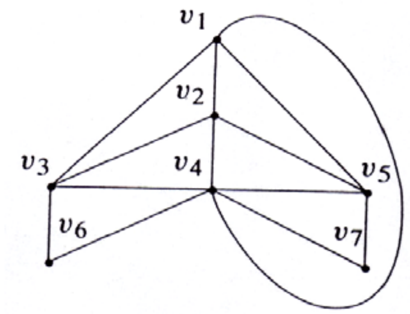
إذا كان G مخططا بيانيا متصلا ، وكانت درجة أي رأس فيه زوجية ، فإن G يحتوي على دورة أويلر.

**البرهان:**

يمكن برهنة هذه النظرية بالاستقراء الرياضي.

**مثال ٤-٢٠:**

نفرض أن G هو المخطط البياني المبين في الشكل التالي. باستخدام نظرية ٤-٢ تَحَقَّق من أن G يحتوي على دورة أويلر. وأوجد دورة أويلر للمخطط G (an Euler cycle for G).




**الحل:**

نلاحظ من الشكل أن G مخطط متصل ، وأن

$$\delta(v_1) = \delta(v_2) = \delta(v_3) = \delta(v_5) = 4$$
$$\delta(v_4) = 6$$
$$\delta(v_6) = \delta(v_7) = 2$$

وحيث أن درجة أي رأس في المخطط زوجية ، فبنظرية ٤-٢ نستنتج أن G يحتوي دورة أويلر. وبفحص المخطط يمكننا الوصول إلى دورة أويلر التالية:

$$(v_6, v_4, v_7, v_5, v_1, v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_4, v_2, v_3, v_6)$$

**نظرية ٤-٣:**

**إذا كان $G$ مخططا بيانيا يحتوي على $m$ حرف و$n$ رأس هي $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ فإن**

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$$

**وبصورة خاصة فإن مجموع درجات جميع الرؤوس في أي مخطط بياني يساوي عددا زوجيا.**

**البرهان:**

**حينما نجمع درجات جميع الرؤوس فواضح أننا نعد كل حرف $(v_i, v_j)$ مرتين: مرة حينما نعده كالحرف $(v_i, v_j)$ في درجة $v_i$ ، ومرة أخرى حينما نعده كالحرف $(v_j, v_i)$ في درجة $v_j$ . وبالتالي ينتج المجموع** $2m$.

**نتيجة:**

**في أي مخطط بياني يوجد عدد زوجي من الرؤوس ذوات الدرجة الفردية** (odd degree).

**البرهان:**

**نفرض أننا سنُقَسِّم رؤوس المخطط إلى مجموعتين: الرؤوس ذوات الدرجة الزوجية** (even degree): $x_1, x_2, \cdots, x_m$ **، والرؤوس ذوات الدرجة الفردية:** $y_1, y_2, \cdots, y_n$ **. ونفرض أن:**

$$S = \delta(x_1) + \delta(x_2) + \cdots + \delta(x_m)$$
$$T = \delta(y_1) + \delta(y_2) + \cdots + \delta(y_n).$$

**بنظرية ٤-٣ نستنتج أن قيمة** $S+T$ **زوجية. وحيث أن** $S$ **هي مجموع قيم زوجية فهي** "$S$" **زوجية. وبالتالي تكون** $T$ **زوجية. ولكن** $T$ **هي مجموع** $n$ **عدد فردي. وبالتالي يجب أن تكون** $n$ **زوجية.**

**نفرض أن مخططا بيانيا متصلا** $G$ **يحتوي بالضبط على رأسين** $v, w$ **درجة كل منهما فردية. ونفرض أننا سنُدخل** (insert) **مؤقتا حرفا** $e$ **من** $v$ **إلى** $w$. **المخطط الناتج** $G'$ **متصل ، ودرجة كل رأس من رؤوسه زوجية. وبالتالي بنظرية ٤-٢ فإن**

**$G'$ يحتوي على دورة أويلر. فإذا حذفنا الحرف e من دورة أويلر هذه فإننا نحصل على مسار خالي من الأحرف المكررة (repeated edges) من v إلى w يحتوي على جميع أحرف ورؤوس G. وهكذا فقد أثبتنا أنه إذا احتوى مخطط بياني على رأسين بالضبط v, w درجة كل منهما فردية ، فإنه يوجد مسار خالي من الأحرف المكررة يحتوي على جميع الأحرف والرؤوس من v إلى w. ويمكننا كذلك إثبات العكس (converse) بطريقة مماثلة.**

**نظرية ٤-٤:**

**يشتمل أي مخطط بياني على مسار خالي من الأحرف المكررة من v إلى w (حيث $v \neq w$) يحتوي على جميع الأحرف والرؤوس إذا وفقط إذا كان المخطط متصلا ، وكانت v, w الرأسين الوحيدتين صاحبتي الدرجة الفردية.**

**البرهان:**

**نفرض أن G مخطط بياني يشتمل على مسار P خالي من الأحرف المكررة من v إلى w ، وأن P يحتوي على جميع الأحرف والرؤوس في G. بالتأكيد المخطط G متصل. فإذا أضفنا حرفاً e من v إلى w ، فإن المخطط الناتج سيحتوي على دورة أويلر وهي المسار P مع الحرف المضاف e. وبتطبيق نظرية ٤-١ فإن درجة أي رأس تكون زوجية. وإزالة (removing) الحرف المضاف e تؤثر فقط على درجتي v, w حيث تنقص كل منهما بواحد. وهكذا نرى أنه في المخطط البياني الأصلي تكون درجة كل من v, w فردية ، بينما درجات جميع الرؤوس الأخرى زوجية.**

**وأما العكس فقد تمت مناقشته قبل نص النظرية مباشرة.**

**نظرية ٤-٥:**

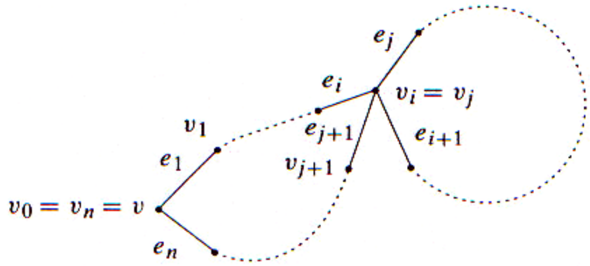
**إذا احتوى مخطط بياني G على دورة من v إلى v ، فإن G يحتوي على دورة بسيطة (simple cycle) من v إلى v.**

**البرهان:**

**نفرض أن**

$$C = (v_0, e_1, v_1, \cdots, e_i, v_i, e_{i+1}, \cdots, e_j, v_j, e_{j+1}, v_{j+1}, \cdots, e_n, v_n)$$

دورة من v إلى v حيث $v = v_0 = v_n$ (انظر الشكل التالي).




إن لم تكن C دورة بسيطة ، فإن $v_i = v_j$ لبعض القيم $i < j < n$. ويمكننا أن نستبدل بالدورة C (replace) الدورة

$$C' = (v_0, e_1, v_1, \cdots, e_i, v_i, e_{j+1}, v_{j+1}, \cdots, e_n, v_n)$$

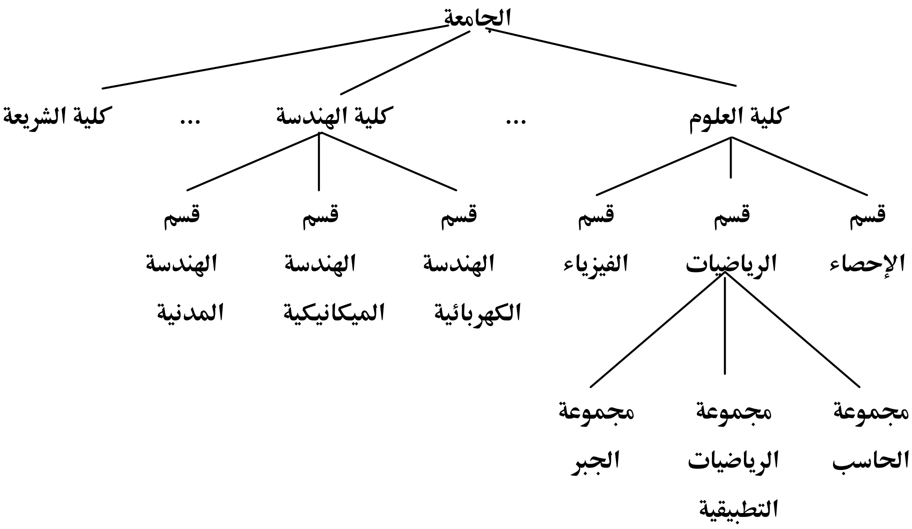
وإن لم تكن $C'$ دورة بسيطة من v إلى v ، فنكرر الإجراء السابق. وأخيرا (eventually) سنحصل على دورة بسيطة من v إلى n.

## ثالثا: الأشجار
## Trees

تُعد الأشجار واحدة من أهم الطبقات الجزئية (subclasses) من المخططات البيانية (graphs) التي تجد تطبيقات مختلفة في الحياة العملية. وعلم الحاسوب بصفة خاصة يستخدم الأشجار في تطبيقات عديدة من أهمها تخزين واسترجاع المعلومات عن طريق ترتيب البيانات وربط علاقات بعضها ببعض (organizing and relating data) في قاعدة بيانات (a database). كما تفيد الأشجار في المسائل النظرية (theoretical problems) كالوصول إلى الوقت الأمثل (optimal time) في عمليات التصنيف والترتيب والفرز (sorting).

وكذلك تستخدم الأشجار في النظم التي يمكن تصنيفها طبقا لنظام هرمي (hierarchical). فمثلا الجامعة تتكون من عدة كليات ، وكل كلية تتكون من مجموعة من الأقسام العلمية ، والقسم العلمي الواحد يحتوى على عدة مجموعات

متخصصة ، وهكذا ... ويمكن تمثيل ذلك النظام الهرمي باستخدام شجرة كما يظهر من الشكل التالي.




**تمثيل الجامعة كنظام هرمي**

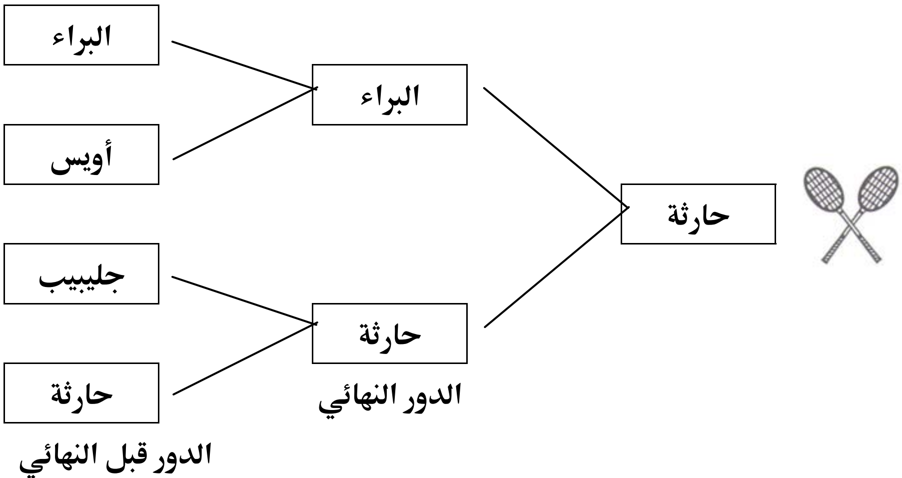
**تعريف:**

**الشجرة (الحرة)** T [(free) tree] **هي مخطط بياني بسيط** (simple graph) **يحقق الشرط التالي: إذا كان** v, w **رأسين في** T **، فإنه يوجد مسار بسيط وحيد** (unique simple path) **من** v **إلى** w.

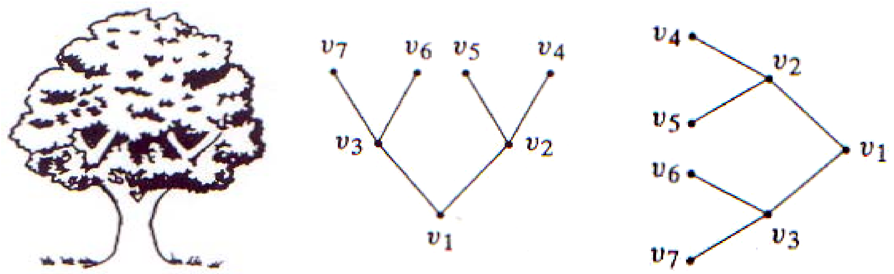
**والشجرة ذات الجذر** (rooted tree) **هي شجرة فيها رأس خاص يطلق عليه (يعرف باسم) الجذر** (root).

**مثال ٤-٢١:**

**الشكل التالي يبين نتائج مباريات الدور قبل النهائي** (semifinals) **والدور النهائي** (finals) **في دوري التنس** (tennis tournament) **وذلك بنظام خروج المغلوب** (single-elimination tournament)**. ففي الدور قبل النهائي فاز البراء على أُويس ، وحارثة على جليبيب. ثم التقى الفائزان البراء وحارثة في الدور النهائي وفاز حارثة.**




**إذا نظرنا إلى هذا الشكل لمباريات التنس على أنه مخطط بياني (graph) [انظر الشكل التالي: (أ)] فإننا نحصل على شجرة. وإذا أدرنا (rotate) هذا الشكل (أ) فإنه [انظر الشكل (ب)] يصبح شبيها بالشجرة الطبيعية (natural tree) [الشكل (ج)].**

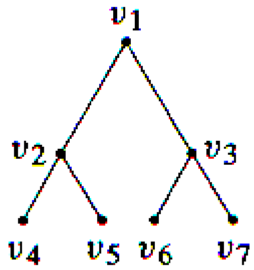



(ج) (ب) (أ)

**وإذا اخترنا الفائز النهائي ليكون الجذر ، فإننا نحصل على شجرة ذات جذر (rooted tree) [الشكل الأصلي لنتائج المباريات ، أو المخطط البياني (أ) المقابل له]. ولاحظ أنه إذا كان $v, w$ رأسين في هذا المخطط فإن هناك مسارا بسيطا وحيدا من $v$ إلى $w$. مثلا المسار البسيط الوحيد من $v_2$ إلى $v_7$ هو $(v_2, v_1, v_3, v_7)$.**

**ملاحظة:**

بعكس الحال في الأشجار الطبيعية حيث توجد الجذور أسفلها (at the bottom) ، في نظرية المخططات البيانية تُرسم الأشجار ذوات الجذور عادة والجذور أعلاها (at the top). فمثلا الشكل التالي (د) يبين الطريقة المعتادة لرسم شجرة الشكل السابق (أ) حيث $v_1$ هو الجذر.




(د)

نبدأ بوضع الجذر $v_1$ أعلا الشكل ، ثم تحت الجذر وعلى المستوى نفسه (same level) نضع الرأسين $(v_2, v_3)$ اللتين يمكن الوصول إليهما من الجذر على مسار بسيط طوله 1. ثم تحت كل من هذين الرأسين $(v_2, v_3)$ وعلى المستوى نفسه نضع الرؤوس $v_4, v_5, v_6, v_7$ ، وهي التي يمكن الوصول إلى أي منها من الجذر عبر مسار بسيط طوله 2. ونستمر بهذه الطريقة حتى ننتهي من رسم الشجرة كلها. وحيث أن المسار البسيط من الجذر إلى أي رأس مُعطَى هو مسار وحيد ، فأي رأس تكون على مستوى محدد بطريقة وحيدة (uniquely determined level).

تعريف:

مستوى الجذر (level of the root) يطلق عليه المستوى 0 (level) والرؤوس التي تقع أسفل الجذر يقال إنها تقع في المستوى 1 ، وهكذا. أي أن مستوى أي رأس v (level of a vertex) هو طول المسار البسيط من الجذر إلى v.

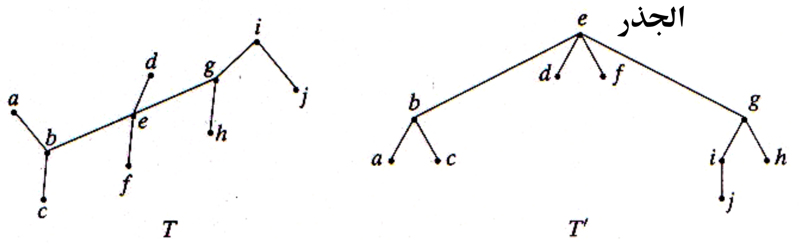
وارتفاع أي شجرة ذات جذر (height of a rooted tree) هو قيمة أكبر مستوى (maximum level number) من بين مستويات رؤوس الشجرة.

**مثال ٤-٢٢:**

**في الشجرة (د) ذات الجذر المرسومة بعد المثال السابق (مثال ٤-٢١) الرؤوس $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ تقع – على الترتيب – في المستويات 2 ,2 ,2 ,2 ,1 ,1 ,0. وارتفاع الشجرة يساوي 2.**

**مثال ٤-٢٣:**

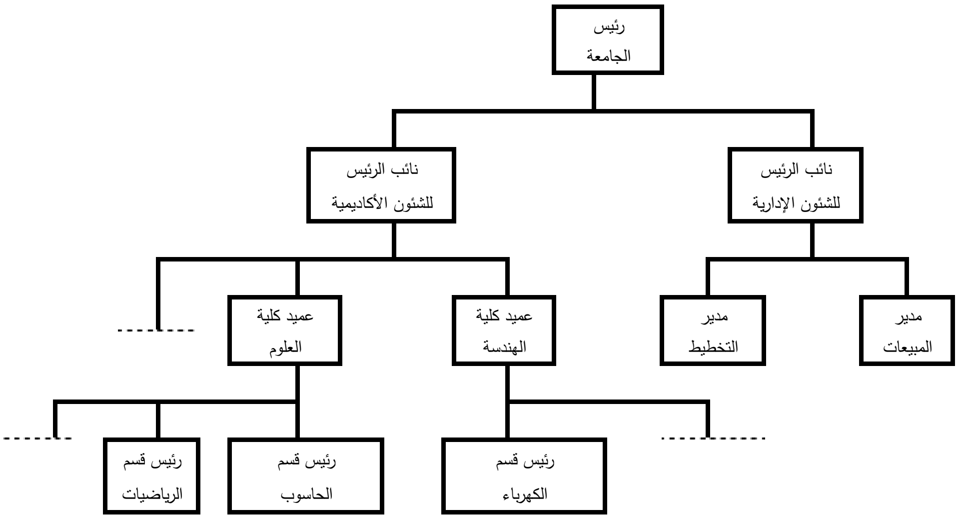
**في الشجرة T المبينة في الشكل التالي إذا اعتبرنا أن e هي الجذر فإننا نحصل على الشجرة $T'$ ذات الجذر (routed tree) المبينة أيضا في الشكل.**




**الرؤوس a, b, c, d, e, f, g, h, i, j تقع – على الترتيب – في المستويات 3 ,2 ,2 ,1 ,1 ,0 ,1 ,2 ,1 ,2. وارتفاع $T'$ يساوي 3.**

**مثال ٤-٢٤:**

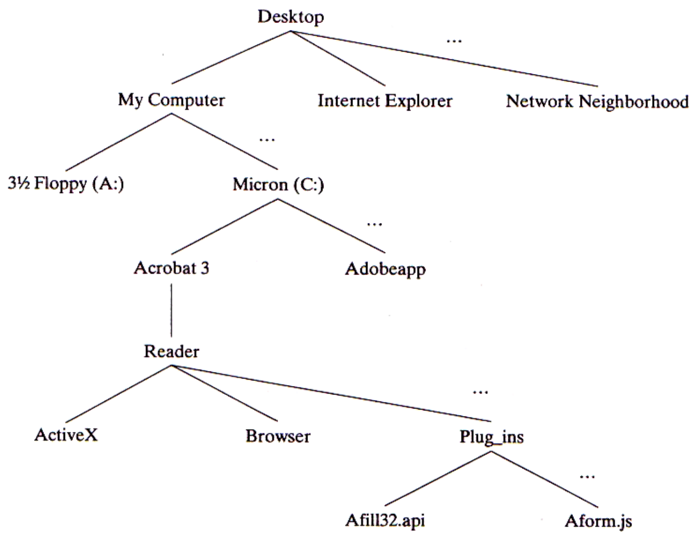
**كثيرا ما تستخدم الشجرة ذات الجذر في تحديد (specifying) العلاقات الهرمية (hierarchical relationships) ، كما رأينا مثلا – في مطلع الحديث عن الأشجار – في تمثيل الجامعة: كلياتها ، وأقسامها ، وتخصصاتها ، ... الخ. وعندما تستخدم الشجرة لتحديد هذه العلاقات فإذا كانت الرأس a في مستوى أقل بواحد من مستوى الرأس b ، وكانت a, b متجاورتين (adjacent) ، فيقال إن "a فوق b مباشرة " [a is "just above" b] ، وتوجد علاقة منطقية (logical relationship) بين a, b نعبر عنها بعبارة مثل: "a تتحكم في b" (a dominates b) ، أو "b تخضع لـ a " "b is subordinate to a". والشكل التالي يوضح مثالا لهذه الشجرة ، حيث يعرض مخططا لترتيب العلاقات الإدارية في الجامعة (administrative organizational chart of a university).**




**مثال ٤-٢٥:**

**نظم ملفات الحاسوب** (Computer File System)

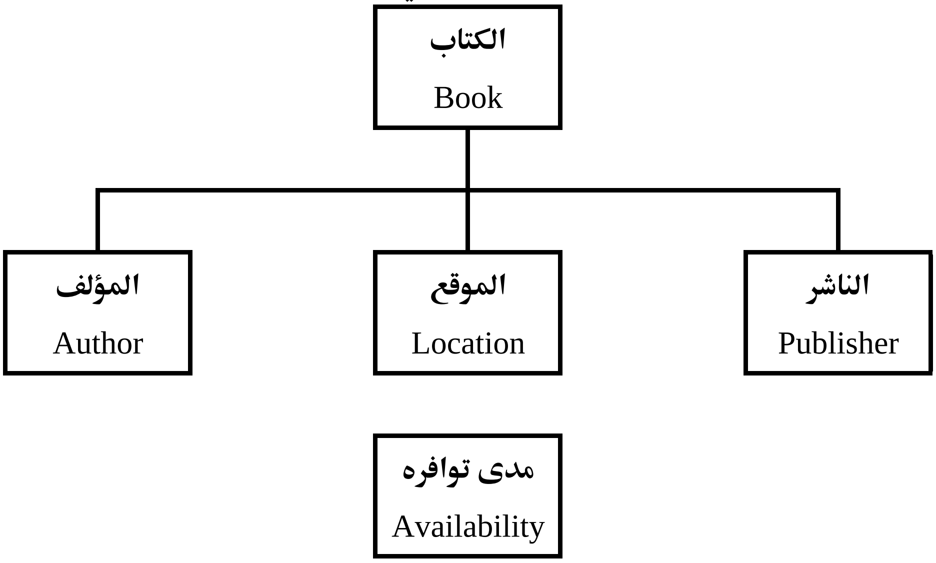
**تقوم نظم التشغيل الحديثة في أجهزة الحاسوب** (modern computer operating systems) **بترتيب المجلدات والملفات** (folders & files) **باستخدام بنية الشجرة ، حيث يحتوي المجلد على مجلدات أخرى وملفات. والشكل التالي يعرض شجرة ذات جذر لتمثيل مجلدات وملفات "متصفح النوافذ"** (Windows Explorer) **في أحد أجهزة الحاسوب ، واسم الجذر** Desktop.



**مثال ٤-٢٦:**

**أشجار التعريف الهرمية** (Hierarchical Definition Trees)

**تستخدم هذه الأشجار لبيان العلاقات المنطقية** (logical relationships) **بين السجلات في أي قاعدة بيانات** (a database). **[وقاعدة البيانات هي مجموعة سجلات يعالجها** (manipulate) **الحاسوب] والشكل التالي يعرض شجرة يمكن استخدامها كنموذج** (model) **لإنشاء** (setting up) **قاعدة بيانات للاحتفاظ** (maintaining) **بسجلات عن كتب موجودة في عدة مكتبات.**




## شفرات هوفمان (Huffman Codes)

**أكثر الطرق استخداما لتمثيل الرموز** (characters) **داخليا** (internally) **في الحاسوب هي استخدام سلاسل رموز ثنائية الأرقام ذوات طول ثابت** (fixed-length bit strings). **فمثلا شفرة** ASCII **(الشفرة القياسية الأمريكية لتبادل المعلومات)** (American Standard Code for Information Interchange) **تمثّل كل رمز بسلسلة مكونة من سبعة أرقام ثنائية ، كما هو مبين في الجدول التالي الذي يعرض كلمات شفرة** ASCII **لبعض الرموز.**

| الرمز Character | شفرة ASCII ASCII Code |
|---|---|
| A | 100 0001 |
| B | 100 0010 |
| C | 100 0011 |
| 1 | 011 0001 |
| 2 | 011 0010 |
| ! | 010 0001 |
| * | 010 1010 |

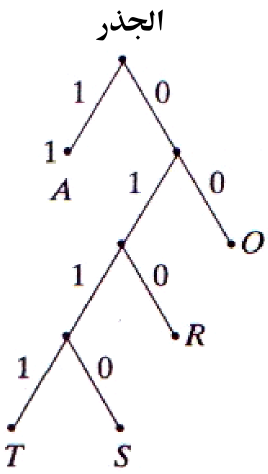
**أما شفرة هوفمان فإنها تمثل الرموز بسلاسل رموز ثنائية الأرقام متغيرة الأطوال** (variable length bit strings)**. وفكرتها الأساسية هي استخدام سلاسل قصيرة الطول** (short bit strings) **لتمثل الرموز الأكثر شيوعا / استخداما** (most frequently used characters) **واستخدام سلاسل أطول لتمثيل الرموز الأقل استخداما. وبهذه الطريقة يمكننا عموما تمثيل أي مجموعة سلاسل رموز** (strings of characters) – **كنص** (text) **مثلا أو برنامج** (program) – **في حيِّز أقل** (less space) **مما لو استخدمنا شفرة ثابتة الطول كشفرة** ASCII **مثلا. وعلى سبيل المثال فإن جهاز** (VCR Plus + device) **الذي يقوم أوتوماتيكيا ببرمجة** (programming) **جهاز تسجيل الفيديو كاسيت** (video cassette recorder) **يستخدم شفرة هوفمان لتوليد أعداد** (generating numbers) **يُدخلها المستخدِم** (user) **لاختيار أي البرامج يود تسجيلها. وهذه الأعداد منشورة في العديد من قوائم أجهزة التلفاز** (television listings).

**ويمكن تعريف شفرة هوفمان بسهولة عن طريق شجرة ذات جذر ، كالمبينة في الشكل التالي. ولفك شفرة** (decoding) **أي سلسلة رموز ثنائية نبدأ عند الجذر ونتحرك لأسفل عبر فروع الشجرة حتى نصل إلى رمز ، بحيث أنه إذا كان الرمز الثنائي** (bit) **صفرا** 0 **فإننا نتحرك جهة اليمين ، وإذا كان واحداً** 1 **تحركنا جهة اليسار.**

**مثال ٤-٢٧:**

باستخدام شفرة هوفمان المعرَّفة بالشجرة التالية فُك شفرة (decode) السلسلة

01010111 (*)




الحل:

نبدأ عند الجذر ، وحيث أن أول رقم ثنائي 0 تكون أول حركة لليمين. ثم نتحرك لليسار ثم لليمين ، وحينئذ نقابل أول رمز R. ولفك شفرة الرمز التالي نبدأ مرة أخرى عند الجذر. والرقم الثنائي التالي هو 1 ، فنتحرك لليسار ونقابل الرمز التالي A. والأرقام الثنائية الأخيرة نفك شفرتها بالرمز T. وبالتالي فإن السلسلة المعطاة (*) تمثل الكلمة RAT.

وإذا أُعطينا شجرة تعرِّف شفرة هوفمان كتلك المعطاة في المثال السابق ، فإن أي سلسلة أرقام ثنائية (bit string) – كالسلسلة (*) السابقة مثلا – يمكن أن تُفك شفرتها بطريقة وحيدة (uniquely decodable) حتى لو تم تمثيل الرموز بسلاسل أرقام ثنائية مختلفة الأطوال (variable-length bit strings). [مثلا في شفرة هوفمان في المثال السابق (مثال ٤–٢٧): A تُمثَّل بسلسلة طولها 1 (وهي السلسلة 1) ، بينما كل من S, T تمثل بسلسلة طولها 4 (حيث S تمثل بالسلسلة 0110 ، و T بالسلسلة 0111)].

## خوارزمية تكوين شفرة هوفمان المُثْلَى

## Algorithm of Constructing an Optimal Huffman Code

نفرض أن لدينا جدولا يعطي تكرار حدوث (frequency of occurrence) الرموز المطلوب تمثيلها بسلاسل أرقام ثنائية (bit strings). الخوارزمية التالية تكوّن شفرة هوفمان مُثْلى [تُمثّل سلاسل الرموز في أقل حيّز ممكن (represents strings of characters in minimal space)] بشرط أن يكون تكرار رموز السلاسل المطلوب تمثيلها (character frequencies of the strings to be represented) مطابقا (identical) لتكرار الرموز (character frequencies) المعطَى في الجدول.

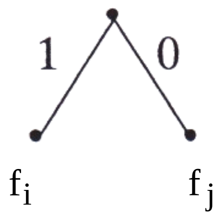
ومخرجات هذه الخوارزمية هي شجرة ذات جذر (rooted tree) حيث الرؤوس (vertices) الموجودة في أقل مستويات (lowest levels) تكون مُعَنْوَنة (labeled) بأعداد التكرار (frequencies) ، والأحرف (edges) معنونة بالأرقام الثنائية (bits) كما سنرى بإذن الله في المثال التالي (مثال ٤–٢٨). وشجرة الشفرة (coding tree) نحصل عليها من الشجرة ذات جذر الناتجة كمخرجات للخوارزمية بعد أن نستبدل فيها بكل تكرار (frequency) الرمز (character) صاحب هذا التكرار.

ويمكن تلخيص خوارزمية تكوين شفرة هوفمان في الخطوات التالية:

١- رتّب العناصر / الرموز حسب احتمالاتها / تكراراتها (frequencies).

٢- استمر تكراريا (repeatedly) في أن تستبدل (replace) بالعنصرين صاحبي أقل تكرارين (smallest two frequencies) عنصرا تكراره هو مجموع هذين التكرارين ، إلى أن تحصل في النهاية على متتالية (sequence) مكونة من عنصرين فقط (نفرض أن تكراريهما $f_i, f_j$).

٣- ارسم شجرة ذات جذر مكونة من الجذر والرأسين $f_i, f_j$ كالمبينة بالشكل.



٤- استمر رجوعيا (backwards) في تكوين أشجار مبتدئا بالشجرة السابقة (ذات الجذر والرأسين $f_i, f_j$) عن طريق أن تستبدل بكل رأس كان تكراره مجموع تكرارين شجرة ذات جذر: جذرها هو هذا الرأس ، ولها رأسان تكراراهما هما هذان التكراران.

٥- وأخيرا للحصول على شجرة شفرة هوفمان المثلى (optimal Huffman coding tree) نستبدل بكل تكرار (frequency) رمزا له هذا التكرار.

مثال ٤-٢٨:

كوِّن (construct) شفرة هوفمان المُثْلى لمجموعة الرموز المعطاة في الجدول التالي:

| الرمز Character | التكرار Frequency |
|---|---|
| ! | 2 |
| @ | 3 |
| # | 7 |
| $ | 8 |
| % | 12 |

الحل:

الخطوات الخمس التالية هي نتيجة تنفيذ الخطوات الخمس المذكورة في خوارزمية تكوين شفرة هوفمان المُثْلى:

١- العناصر مرتبة جاهزة حيث أن تكراراتها تصاعدية.

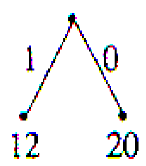
٢- $2, 3, 7, 8, 12 \;\rightarrow\; 2+3, 7, 8, 12$

$5, 7, 8, 12 \;\rightarrow\; 5+7, 8, 12$

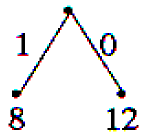
$8, 12, 12 \;\rightarrow\; 8+12, 12$

$12, 20$

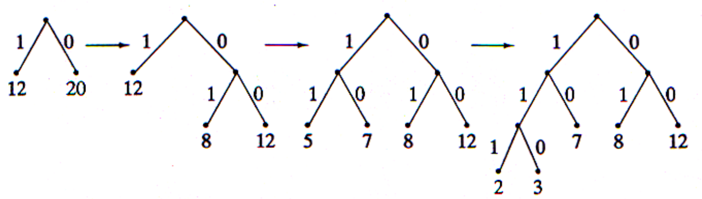
٣-



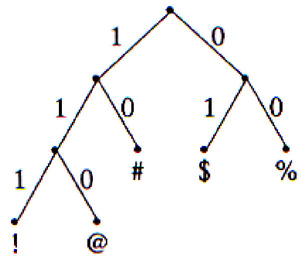
٤-




**هذه الشجرة تحل محل الرأس الذي تكراره 20**
**في الشجرة السابقة التي حصلنا عليها في الخطوة ٣**

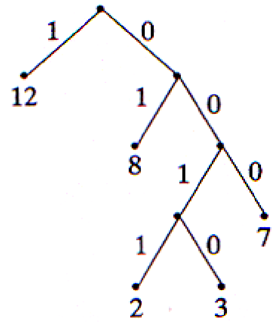



٥-




**ملاحظة:**

**شجرة هوفمان** (Huffman tree) **للجدول المعطى في مثال ٤-٢٨ ليست وحيدة** (unique)**. ففي الخطوة رقم ٤ - ونحن نستمر في تكوين أشجار مرحلية إلى أن نصل إلى الشجرة النهائية المطلوبة - نضع** 5,7 **بدلا من** 12 **، وحيث أن هناك رأسين / عنصرين تكرار كل منهما** 12 **فيكون أمامنا خياران. الشجرة النهائية التي حصلنا عليها في حل المثال نتجت من اختيارنا أحد العنصرين. فإذا اخترنا العنصر** 12 **الآخر فإننا نحصل على الشجرة التالية**




شجرة هوفمان مُثْلى أخرى لمثال ٤–٢٨

وأيٌ من الشجرتين تعطي شفرة مُثْلى (optimal code) ، بمعنى أن أيًّا منهما ستقوم بتشفير (encoding) أي نص (text) لـه تكرارات (frequencies) الجدول السابق المعطَى في مثال ٤–٢٨ في الحيِّز (الأمثل) نفسه بالضبط [exactly the same (optimal) space].

ويمكننا أن نلخص خوارزمية هوفمان في الإجراء التالي:

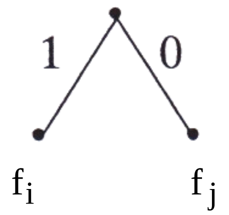
## إجراء خوارزمية تكوين شفرة هوفمان المثلى

**المدخلات:** متتابعة (sequence) من n تكرار ، حيث $n \geq 2$ .

**المخرجات:** شجرة ذات جذر تعرِّف شفرة هوفمان مثلى.

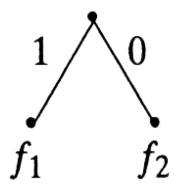
**الإجراء:**

```
procedure huffman (f, n)
    if n = 2 then
        begin
        let f1 and f2 denote the frequencies
        let T be as in Figure A
        return (T)
        end
    let fi and fj denote the smallest frequencies
    replace fi and fj in the list f by fi + fj
    T' := huffman (f, n -1)
    replace a vertex in T' labedlled fi + fj by the tree shown in
        Figure B to obtain the tree T
    return (T)
end huffman
```




**الشكل** B

**الحالة** $n > 2$




**الشكل** A

**الحالة** $n = 2$

**تعريف:**

**نفرض أن** T **شجرة جذرها** $v_0$ . **ونفرض أن** $x, y, z$ **رؤوس في** T ، **وأن** ( $v_0, v_1, \cdots, v_n$ ) **مسار بسيط في** T. **يقال إن:**

أ) $v_{n-1}$ **والد** $v_n$ (**parent** of).

ب) $v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}$ **سلف / أجداد** $v_n$ (**ancestors** of).

ج) $v_n$ **طفل / ابن لـ** $v_{n-1}$ (**child** of).

د) **إذا كان** x **سلفاً / جَدًّا لـ** y (ancestor of) **فإن** y **سليل / حفيد / من ذرية** x (**descendant** of)

هـ) **إذا كان** x, y **ابنين لـ** z **فإن** x, y **أَخَوان (siblings).**

و) **إذا لم يكن لـ** x **أي أبناء** (children) ، **فإن** x **رأس طَرَفية / ورقة (terminal vertex / a leaf).**

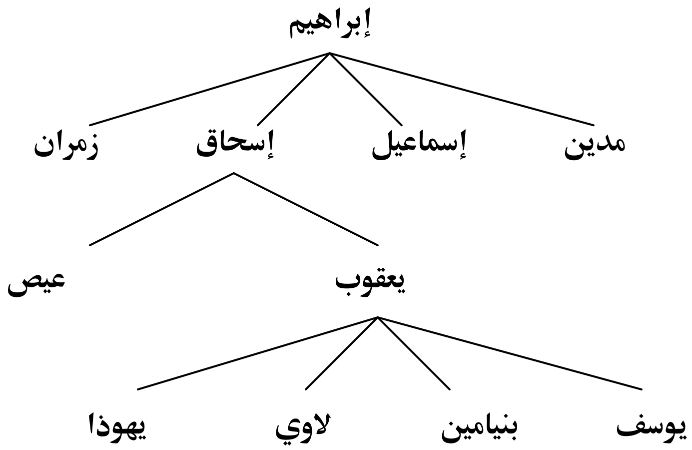
ز) **إذا لم تكن** x **رأساً طرفية فإنها رأس داخلية / غصنية (internal (/branch) vertex).**

ح) **الشجرة الفرعية من** T (**subtree** of) **ذات الجذر** x (rooted at) **هي المخطط البياني** (graph) **ذو مجموعة الرؤوس** V (vertex set) **ومجموعة الأحرف** E (edge set) ، **حيث** V **هي:** x **مع سلالتها / أحفادها / ذريتها** (descendants of x) ، **و** $E_0$ **هي مجموعة الأحرف** e **الواقعة على مسار بسيط من** x **إلى أي رأس في** V:

E = {e | e is an edge on a simple path from x to some vertex in V}

**مثال ٤-٢٩:**

**في الشجرة ذات جذر** (rooted tree) **المبينة بالشكل التالي:**




أ) **والد** (parent) **يعقوب هو إسحاق.**

ب) **أجداد / سلف** (ancestors) **يوسف هم يعقوب وإسحاق وإبراهيم.**

ج) **أبناء** (children) **يعقوب هم يوسف وبنيامين ولاوي ويهوذا.**

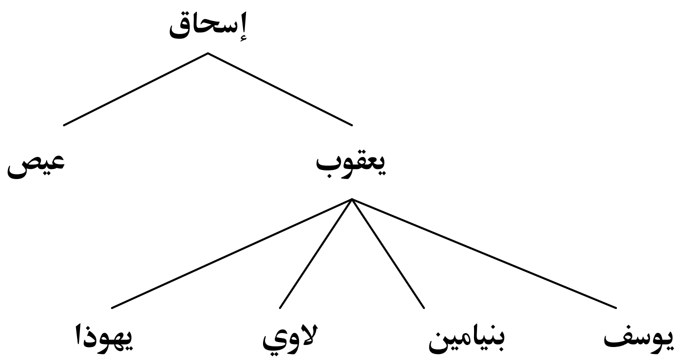
د) **أحفاد / ذرية / سلالة** (descendants) **إسحاق هم: يعقوب وعيص ويوسف وبنيامين ولاوي ويهوذا.**

هـ) **إسماعيل وإسحاق أخوان** (siblings).

و) **الرؤوس الطرفية** (terminal vertices) **هي: زمران وعيص ويهوذا ولاوي وبنيامين ويوسف وإسماعيل ومدين.**

ز) **الرؤوس الداخلية** (internal vertices) **هي: إبراهيم وإسحاق ويعقوب.**

ح) **الشجرة الفرعية التي جذرها إسحاق** (subtree rooted at) **مبينة في الشكل التالي:**




**النظرية التالية (دون برهان) تلخص بعض خصائص (characterizations) الأشجار.**

**نظرية ٤–٦ :**

**نفرض أن T مخطط بياني (graph) عدد رؤوسه (vertices) n. العبارات التالية جميعها متكافئة:**

**أ)** T **شجرة.**

**ب)** T **مخطط متصل (connected) ولا دَوْرَوِيّ (acyclic) [أي ليس فيه أي دورة (cycle)].**

**ج)** T **مخطط متصل وعدد أحرفه (edges) n-1.**

**د)** T **مخطط دَوْرَوِيّ وعدد أحرفه n-1.**

## رابعا: الأشجار المولِّدة
## Spanning Trees

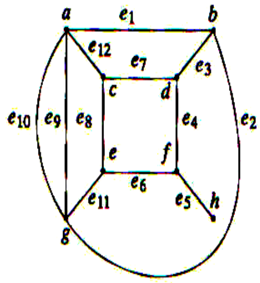
**في الجزء التالي ندرس مسألة إيجاد مخطط بياني جزئي T من مخطط بياني G بحيث يكون T شجرة تحتوي على جميع رؤوس G. ومثل هذه الشجرة يطلق عليها شجرة مولِّدة. والطرق المستخدمة لإيجاد الأشجار المولِّدة يمكن تطبيقها أيضا في مسائل أخرى كما سنرى بإذن الله.**

**تعريف:**

**يُقال إن شجرة** T **هي شجرة مولِّدة (a spanning tree) لمخطط بياني** G **إذا كانت** T **مخططا بيانيا جزئيا من** G **يحتوي على جميع رؤوس** G.

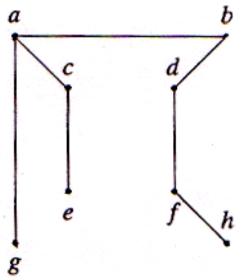
**مثال ٤–٣٠:**

**نفرض أن** G **هو المخطط البياني المبين في الشكل التالي:**



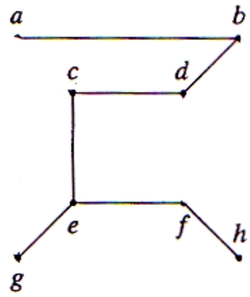

G

**الشكل التالي (أ) يعطي شجرة مولِّدة للمخطط** G.




(أ)

**ويُلاحَظ عموما أن أي مخطط بياني قد يحتوي على عدة أشجار مولدة. فمثلا الشكل التالي (ب) يعطي شجرة أخرى مولِّدة للمخطط البياني** G **المعطى في هذا المثال.**




(ب)

**نظرية ٤-٧:**

**أي مخطط بياني G يكون له شجرة مولِّدة إذا وفقط إذا كان G متصلا.**

**البرهان:**

أ) **نفرض أن** G **له شجرة مولِّدة** T. **نفرض أن** a, b **رأسان في** G. **نظرا لأن** a, b **رأسان أيضا في** T **، و**T **شجرة ، لذلك يوجد مسار** P **من** a **إلى** b. **ولكن** P **يُعَدُّ أيضا مسارا من** a **إلى** b **في** G **، وبالتالي فإن** G **يكون متصلا.**

ب) **نفرض أن** G **مخطط بياني متصل. إذا كان** G **لا دَوْرَويًّا** (acyclic) **فبالنظرية السابقة (نظرية ٤-٦) يكون** G **شجرة.**

**نفرض أن** G **يحتوي على دورة** (cycle). **نزيل** (remove) **حرفا** (an edge) **[ولكن لا نزيل أي رأس] من هذه الدورة. المخطط البياني الناتج مازال متصلا. فإن كان لا دورويا فإننا نتوقف. وإن كان يحتوي على دورة فإننا نزيل حرفا من هذه الدورة. ونستمر بهذه الطريقة إلى أن نحصل أخيرا على مخطط بياني جزئي متصل لا دوروي** T. **وبنظرية ٤-٦ فإن** T **شجرة. وحيث أن** T **تحتوي على جميع رؤوس** G **، فإن** T **شجرة مولِّدة للمخطط** G.

**وإذا حاولنا تطبيق خوارزمية لإيجاد شجرة مولدة لمخطط بياني على أساس برهان نظرية ٤-٧ فإن كفاءة الخوارزمية لن تكون عالية ، وستتطلب عمليات بحث عن دورات** (cycles) **تستغرق وقتا طويلا** (time-consuming).

**وفيما يلي نناقش خوارزميتين لإيجاد الشجرة المولَّدة. وسنوضح أولا الخوارزمية الأولى بمثال ، ثم نذكر خطوات الخوارزمية.**

**مثال ٤-٣١:**

**أوجد شجرة** T **مولَّدة للمخطط البياني** G **المعطَى في المثال السابق (مثال ٤-٣٠) باستخدام خوارزمية البحث بالعرض - أولاً** (breadth – first search algorithm).

**الحل:**

**فكرة هذه الخوارزمية هي تشغيل** (processing) **جميع الرؤوس في أي مستوى معطَى قبل الانتقال إلى المستوى الأعلى التالي** (next-higher level).

- **اختر أولا ترتيبا** (ordering) **معينا لرؤوس المخطط** G **، وليكن** abcdefgh.
- **اختر أول رأس** a **واعتبره الجذر** (root).
- **افرض أن** T **تتكون من الرأس المفردة** a (single vertex) **دون أي أحرف** (edges).
- **أضف إلى** T **جميع الأحرف** (a, x) **وجميع الرؤوس التي تقابلها هذه الأحرف ، وذلك لجميع قيم** x **من** x = b **إلى** x = h **، بحيث لا تُنتج هذه الإضافات إلى** T **أي دورة** (cycle) **[أي لا تضفها إذا أدت إضافتها إلى وجود دورة].**

  **بناءً على ذلك نضيف إلى** T **الأحرف**

  (a, b), (a, c), (a,g)

  **[ملاحظة: يمكننا إضافة / استخدام أي من الحرفين المتوازيين** (parallel edges) **الواقعين على** a, g]
- **كرِّر هذا الإجراء مع الرؤوس الواقعة في المستوى** 1 (level) **بفحصها** (examining) **واحدة تلو الأخرى** (each in order):

  b: **أضف** (b, d)

  c: **أضف** (c, e)

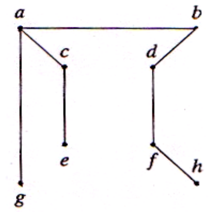
  e: **لا تضف شيئا**
- **كرر هذا الإجراء مع الرؤوس الواقعة في المستوى** 2:

  d: **أضف** (d, f)

  e: **لا تضف شيئا**
- **كرر هذا الإجراء مع الرؤوس الواقعة في المستوى** 3:

  f: **أضف** (f, h)

وحيث أنه لا يمكن إضافة أي أحرف للرأس الوحيدة h في المستوى 4: فإن الخوارزمية قد انتهى تنفيذها ، ونكون قد حصلنا على الشجرة المولِّدة المبينة في الشكل التالي:




وفيما يلي نعرض الإجراء الذي يحدد لنا خطوات هذه الخوارزمية.

**إجراء خوارزمية البحث بالعرض-أولا عن شجرة مولِّدة**

**Breadth-First Search for a Spanning Tree Algorithm**

**المدخلات:** مخطط بياني متصل G رؤوسه مرتبة:

$$v_1, v_2, \cdots, v_n$$

**المخرجات:** شجرة مولِّدة T

**الإجراء:**

**procedure** bfs(V , E)
// V = vertices ordered $v_1, \cdots, v_n$ ; E = edges
// $V'$ = vertices of spanning tree T; $E'$ = edges of spanning tree T
// $v_1$ is the root of the spanning tree
// S is an ordered list
S := ($v_1$)
$V'$ := $\{v_1\}$
$E'$ := $\phi$
**while true do**
  **begin**
    **for** each $x \in S$, in order, **do**
      **for** each $y \in V - V'$ , in order, **do**
        **if** (x, y) is an edge **then**
          add edge (x, y) to $E'$ and y to $V'$
  **if** no edges were added **then**
    **return** (T)

```
        S := children of S ordered consistently with the original
                vertex ordering
        end
end bfs
```

ملاحظة:

خوارزمية البحث بالعرض – أولا عن شجرة مولدة يمكن أن تستخدم فيما يلي:

١) اختبار (testing) ما إذا كان مخطط بياني اختياري G عدد رؤوسه n متصلا أم لا ، وذلك بأن نطبق أولا الخوارزمية ونحصل على شجرة مولِّدة T ، ويكون G متصلا إذا وفقط إذا كان عدد رؤوس T مساويا n رأسا.

٢) إيجاد مسارات ذوات أقل أطوال ممكنة (minimum-length paths) في أي مخطط بياني غير موزون (unweighted graph) من رأس محددة v (a fixed vertex) إلى جميع الرؤوس الأخرى ، وذلك بأن نطبق أولا الخوارزمية ونحصل على شجرة مولِّدة ذات جذر عند الرأس v ، ونلاحظ أن طول أقصر مسار (length of a shortest path) من v إلى رأس في المستوى i في الشجرة المولدة يساوي i.

هناك خوارزمية أخرى تُدعَى البحث بالعُمق – أولا عن شجرة مولِّدة ، حيث يتقدم البحث إلى المستويات المتتالية (successive levels) في شجرة في أقرب فرصة ممكنة (at the earliest possible opportunity).

**إجراء خوارزمية البحث بالعمق – أولا عن شجرة مولِّدة**

**Depth-First Search for a Spanning Tree Algorithm**

**المدخلات:** مخطط بياني متصل G رؤوسه مرتبة:

$$v_1, v_2, \cdots, v_n$$

**المخرجات:** شجرة مولِّدة T

**الإجراء:**

```
procedure dfs(V, E)
  //  V′ = vertices of spanning tree T;  E′ = edges of spanning tree T
```

```
//  v1 is the root of the spanning tree
 V′ := {v1}
 E′ := φ
 w := v1
while true do
      begin
      while there is an edge (w, v) that when added to T does no
              create a cycle in T do
              begin
              choose the edge (w, vk) with minimum k that when
added
                      to T does not create a cycle in T
              add (w, vk) to E′
              add vk to V′
              w := vk
              end
      if w = v1 then
              return (T)
      w := parent of w in T // backtrack
      end
end dfs
```

**مثال ٤-٣٢:**

**أوجـد شـجرة T مولّـدة للمخطـط البيـاني G المعطَـى في مثـال ٤-٣٠ باستخدام خوارزمية البحث بالعمق – أولا (depth- first search algorithm)، وباختيار الترتيب abcdefgh لرؤوس المخطط.**

**الحل:**

- **اختر أول رأس a وأطلق عليها "الجذر" (root).**
- **أضف الحرف (a, x) – مع اختيار أصغر x (minimal) – إلى الشجرة T.**
  **[أصغر x حسب ترتيب رؤوس المخطط].**
  **في مثالنا الحالي نضيف الحرف (a, b).**
- **كرر هذه العملية. أضف الحروف (b,d), (d,c), (c,e), (e,f), (f,h).**

- **الآن لا يمكننا إضافة حرف صيغته** (h, x) **، ولذلك نرجع (من حيث أتينا)** (backtrack) **إلى** f **والد** h **، ونحاول إضافة حرف صيغته** (f, x). **مرة أخرى لا يمكننا إضافة أي حرف صيغته** (f, x) **، ولذلك نرجع إلى** e **والد** f.
- **هذه المرة ننجح في إضافة الحرف** (e, g) **إلى الشجرة** T.
- **الآن لا يمكننا إضافة أي حرف آخر ، ولذلك نرجع أخيرا إلى الجذر** (finally backtrack to the root) **وينتهي تنفيذ الإجراء/ الخوارزمية.**

**ملاحظة:**

**خوارزمية البحث بالعمق – أولا يطلق عليها أيضا خوارزمية الرجوع (من حيث أتينا) (backtracking algorithm) وذلك بسبب الأمر / السطر**

w := parent of w in T    //  backtrack

**في الإجراء السابق لهذه الخوارزمية حيث نرجع** (retreat) **عبر حرف** (along an edge) **نحو الجذر المختار ابتداءً** (initially chosen root).

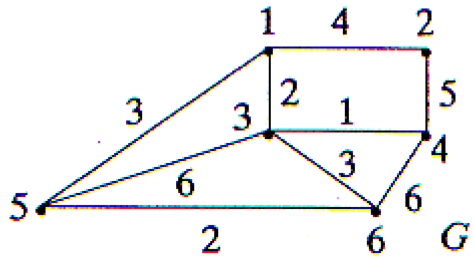
## خامسا: الأشجار المولِّدة الدنيا
## Minimal Spanning Trees

**تعريف**

**نفرض أن** G **مخطط بياني موزون** (weighted graph). **الشجرة المولدة الدنيا (mst) (minimal spanning tree) للمخطط** G **هي شجرة مولدة للمخطط** G **لها أدنى / أقل وزن** (minimum weight) **ممكن.**

**مثال ٤-٣٣:**

**الشكل التالي للمخطط البياني الموزون** G **يمثل ست مدن** (cities) **، وتكاليف** (costs) **بناء طرق** (building roads) **بين أزواج معينة** (certain pairs) **من هذه المدن. والمطلوب بناء نظام / شبكة طرق ذات أقل تكاليف ممكنة** (lowest-cost road system) **بحيث تصل** (connect) **المدن الست بعضها ببعض.**




**ست مدن: $1 \rightarrow 6$**

**وتكاليف بناء طرق بين أزواج منها**

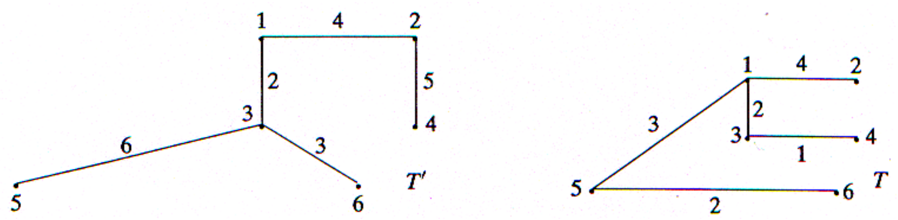
**الحل يمكن أن يُمَثَّل بمخطط بياني جزئي** (subgraph) **تتحقق فيه الشروط التالية:**

١) **يجب أن يكون شجرة مولدة** (spanning tree) **لأنه يجب أن يحتوي على جميع الرؤوس ، حتى تقع جميع المدن في نظام / شبكه الطرق** (road system).

٢) **يجب أن يكون متصلا** (connected) **حتى يمكن الوصول إلى أي مدينة من أي مدينة أخرى.**

٣) **يجب أن يحتوي على مسار بسيط وحيد** (unique simple path) **بين أي زوج من الرؤوس ، لأن أي مخطط يحتوي على مسارات بسيطة متعددة** (multiple simple paths) **بين زوج من الرؤوس لا يمكن أن يمثل شبكة ذات أقل تكاليف ممكنة.**

**وبالتالي فالمطلوب هو شجرة مولدة مجموع أوزانها أقل ما يمكن. الشجرة** $T'$ **في الشكل التالي هي شجرة مولدة للمخطط المعطى** G. **ووزن** (weight) $T'$ **يساوي** 20. **وهذه الشجرة ليست شجرة مولدة دنيا لأن الشجرة المولدة** T **المبينة أيضا في الشكل التالي وزنها** 12. **وسنرى لاحقا بإذن الله أن** T **شجرة مولدة دنيا للمخطط** G.




## خوارزمية " بريم " (Prim's Algorithm)

فيما يلي ندرس بإذن الله خوارزمية [تُدعى خوارزمية "بريم" (Prim's algorithm)] للحصول على شجرة مولِّدة دنيا mst. وهذه الخوارزمية تبني (builds) شجرة عن طريق إضافة أحرف (adding edges) تكراريا (iteratively) إلى أن نحصل على شجرة مولدة دنيا.

١) تبدأ الخوارزمية برأس واحدة (single vertex).

٢) ثم نضيف – في كل تكرار (iteration) – إلى الشجرة الحالية current mst (أي إلى آخر شجرة متوفرة) حرفاً ذا أقل وزن (a minimum weight edge) بحيث لا يكمل دورة (does not complete a cycle)، أي بحيث تكون رأس في الشجرة المولدة الدنيا mst، والرأس الأخرى ليست في هذه الشجرة. وبالتالي تضاف الآن هذه الرأس الأخرى إلى الشجرة mst.

٣) تنتهي الخوارزمية حين لا يمكن إضافة أي حرف إلى الشجرة mst.

وهناك خوارزمية أخرى تُدعَى خوارزمية " كرسكال " (Kruskal's algorithm) لإيجاد شجرة مولدة دنيا وسنعرضها بإذن الله في التمرينات بنهاية الفصل.

**إجراء خوارزمية "بريم" لإيجاد شجرة مولدة دنيا**

**Prim's Algorithm for finding a minimal spanning tree (mst)**

**المدخلات:** مخطط بياني موزون متصل رؤوسه
1, 2, ..., n
ورأس الابتداء s (start vertex).

إذا كان (i, j) حرفا (edge)، فإن w(i, j) هو وزن (weight) هذا الحرف (i, j).

وإذا لم يكن (i, j) حرفا، فإن w(i, j) تساوي ∞ [قيمة أكبر من أي وزن فعلي (actual weight)].

**المخرجات:** مجموعة الأحرف E في شجرة مولدة دنيا (mst)

**الإجراء:**

```
procedure prim (w, n, s)
  //  v(i) = 1 if vertex i has been added to mst
  //  v(i) = 0 if vertex i has not been added to mst
  for i := 1 to n do
  v(i)  := 0
  // add start vertex to mst
    v(s) := 1
  // begin with an empty edge set
    E := ϕ
  // put n-1 edges in the minimal spanning tree
    for i := 1 to n-1 do
    begin
  // add edge of minimum weight with one vertex in mst and one
  // vertex not in mst
    min := ∞
    for j := 1 to n do
      if v(j) = 1 then  // j is a vertex in mst
        for k = 1 to n do
          if v(k) = 0 and w(j, k) < min then
            begin
            add_vertex := k
            e := (j, k)
            min := w(j, k)
            end
      // put vertex and edge in mst
      v(add_vertex) := 1
      E := E ∪ {e}
      end
   return (E)
end prim
```

**مثال ٤-٣٤:**

**أوجد بتطبيق إجراء خوارزمية "بريم" شجرة مولدة دنيا للمخطط البياني G المعطَى في المثال السابق (مثال ٤-٣٣) ، بفرض أن رأس البداية s = 1.**

**الحل:**

- **نبدأ بإضافة رأس البداية s = 1 إلى الشجرة المولدة الدنيا mst (السطر رقم 3 في الإجراء).**
- **أول مرة ننفذ فيها عروة for المكتوبة في السطور من 8 إلى 16 في الإجراء [لمعرفة أول حرف (edge) يضاف إلى مجموعة الأحرف E ، أي أول حرف يضاف إلى الشجرة mst] نجد أن الأحرف التي يكون لأي منها رأسان: إحداهما في الشجرة mst ، والأخرى ليست في الشجرة ، هي الأحرف المبينة فيما يلي مع أوزانها:**

| الحرف<br>edge | وزنه<br>weight |
|---|---|
| (1, 2) | 4 |
| (1, 3) | 2 |
| (1, 5) | 3 |

**ومنها يتبين لنا أن الحرف (1, 3) هو الحرف ذو أقل وزن ، ولذلك نختاره.**

- **في السطر رقم 17 من الإجراء نضيف الرأس رقم 3 إلى الشجرة mst ، وفي السطر رقم 18 نضيف الحرف (1, 3) إلى المجموعة E.**
- **في المرة الثانية التي ننفذ فيها عروة for – المشار إليها سابقا (المكتوبة في السطور من 8 إلى 16) نجد أن الأحرف التي رأس أحدها في الشجرة mst والأخرى ليست في الشجرة هي:**

| الحرف<br>edge | وزنه<br>weight |
|---|---|
| (1, 2) | 4 |
| (1, 5) | 3 |
| (3, 4) | 1 |
| (3, 5) | 6 |
| (3, 6) | 3 |

ونلاحظ أن وزن الحرف (3, 4) هو أقل وزن ، ولذلك نختار هذا الحرف.

- في السطرين 17, 18 من الإجراء نضيف الرأس 4 إلى الشجرة mst ، ونضيف الحرف (3, 4) إلى المجموعة E.
- في المرة التالية التي ننفذ فيها عروة for المكتوبة في السطور من 8 إلى 16 نجد أن الأحرف التي رأس أحدها في الشجرة mst والأخرى ليست في الشجرة هي:

| الحرف edge | وزنه weight |
|---|---|
| (1, 2) | 4 |
| (1, 5) | 3 |
| (2, 4) | 5 |
| (3, 5) | 6 |
| (3, 6) | 3 |
| (4, 6) | 6 |

نلاحظ هذه المرة أن هناك حرفين وزن كل منهما يساوي أقل وزن: 3. ويمكن تكوين (constructing) شجرة مولِّدة دنيا mst بإضافة / باختيار (selecting) أي من هذين الحرفين. نفرض أننا سنختار الحرف (1, 5).

- في السطرين 17, 18 من الإجراء نضيف الرأس 5 إلى الشجرة mst ، ونضيف الحرف (1, 5) إلى المجموعة E.
- في المرة التالية التي ننفذ فيها عروة for المكتوبة في السطور من 8 إلى 16 نجد أن الأحرف التي رأس أحدها في الشجرة mst والأخرى ليست في الشجرة هي:

| الحرف edge | وزنه weight |
|---|---|
| (1, 2) | 4 |
| (2, 4) | 5 |
| (3, 6) | 3 |
| (4, 6) | 6 |
| (5, 6) | 2 |

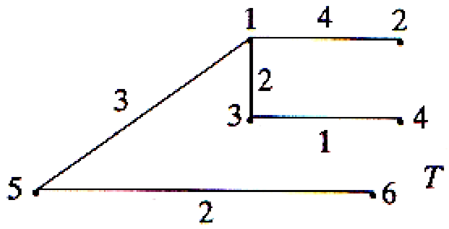
نختار الحرف (5, 6) ذا أقل وزن.

- في السطرين 18 ,17 من الإجراء نضيف الرأس 6 إلى الشجرة mst ، ونضيف الحرف (5, 6) إلى المجموعة E.
- في آخر مرة ننفذ فيها عروة for المكتوبة في السطور من 8 إلى 16 نجد أن الأحرف التي رأس أحدها في الشجرة mst والأخرى ليست في الشجرة هي:

| الحرف<br>edge | وزنه<br>weight |
|---|---|
| (1, 2) | 4 |
| (2, 4) | 5 |

نختار الحرف (1, 2) ذا أقل وزن.

- في السطرين 18 ,17 من الإجراء نضيف الرأس 2 إلى الشجرة mst ، ونضيف الحرف (1, 2) إلى المجموعة E.
- الشكل التالي يعطي الشجرة المولِّدة الدنيا mst التي تم تكوينها (constructed).

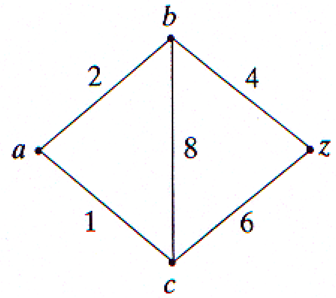



ملاحظة:

في خوارزمية "بريم" للوصول في النهاية إلى شجرة مولِّدة دنيا mst (أي شجرة مولدة ذات أقل وزن ممكن) ، كنا في كل تكرار (at each iteration) نضيف حرفا ذا أقل وزن متوفر لدينا. وعموما ليس من الضروري (not necessarily) في أي خوارزمية أن الوصول إلى نتيجة مُثْلَى (optimum) في كل خطوة / تكرار في الخوارزمية يؤدي حتما إلى أفضل / أَمْثَل حل (optimal solution) للمسألة الأصلية (original problem) بعد الانتهاء من الخوارزمية ، كما يتضح من المثال التالي:

مثال ٤-٣٥:

**نفرض أن لدينا المخطط البياني الموزون** (weighted graph) **المبين في الشكل التالي ، وأن المطلوب إيجاد أقصر مسار** (shortest path) **من** a **إلى** z.




**ونفرض أننا للوصول إلى أقصر مسار هذا سنطبق الخوارزمية التالية:**

**خوارزمية أقصر مسار** (shortest-path algorithm):

**في كل خطوة اختر حرفا متوفرا** (available edge) **وزنه أقل ما يمكن** (having minimum weight) **يقابل** (incident on) **أحدث رأس مضافة** (most recently added vertex).

**عند تطبيق هذه الخوارزمية:**

- **سنختار أولا الحرف** (a, c) (edge) [**لأن وزنه** 1].
- **ثم نختار الحرف** (c, z) (edge) [**وزنه** 6].

**ولكننا نلاحظ أن هذا الحل / المسار ليس أقصر مسار من** a **إلى** z [**فالمسار عبر الحرف** (a, b) **ثم الحرف** (b, z) **أقصر**].

**ولكن خوارزمية "بريم" تضمن لنا دائما أن نصل إلى شجرة مولِّدة دنيا** mst (**أي إلى أمثل حل للمسألة**) **، كما تبين ذلك النظرية التالية ، والتي نذكرها دون برهان.**

**نظرية ٤-٨:**

**خوارزمية "بريم" الموضحة في الإجراء**

procedure prim (w, n, s)

**صحيحة** (correct) **، أي أنه عند الانتهاء من** (termination of) **هذه الخوارزمية تكون** T **شجرة مولدة دنيا** (minimal spanning tree).

## سادسا: الأشجار الثنائية
## Binary Trees

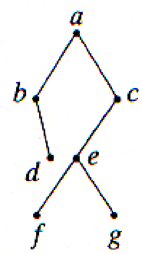
**تعد الأشجار الثنائية من أهم الأنواع الخاصة للأشجار ذوات الجذور** (rooted trees).

**تعريف:**

**الشجرة الثنائية (binary tree) هي شجرة ذات جذر ، لكل رأس فيها ابنان** (2 children) **على الأكثر [أي إما ابنان ، أو ابن واحد** (one child) **، أو ليس لها أبناء** (no children)**]. وإذا كان للرأس ابن واحد فيُعرف بأنه إما ابنٌ أيمن (right child) أو ابنٌ أيسر (left child)** (ولكن ليس الاثنين معا). **وإذا كان للرأس ابنان فأحدهما يعرف بأنه ابنٌ أيمن والآخر يعرف بأنه ابنٌ أيسر.**

**مثال ٤-٣٦:**

**الشكل التالي يمثل شجرة ثنائية.**




**في هذه الشجرة الرأس** b **هي الابن الأيسر للرأس** a **، والرأس** c **هي الابن الأيمن للرأس** a**. والرأس** d **هي الابن الأيمن للرأس** b **، والرأس** b **ليس لها ابنٌ أيسر. والرأس** e **هي الابن الأيسر للرأس** c **، والرأس** c **ليس لها ابنٌ أيمن.**

**مثال ٤-٣٧:**

**أي شجرة تُعرِّف شفرة هوفمان تُعَدُّ شجرة ثنائية. فمثلا في شجرة هوفمان التي حصلنا عليها في حل مثال ٤-٢٨ التحرك من رأس إلى ابنٍ أيسر يعني استخدام الرقم الثنائي** 1 **بينما التحرك من رأس إلى ابنٍ أيمن يعني استخدام الرقم الثنائي** 0.

**تعريف:**

**الشجرة الثنائية التامة (full binary tree): هي شجرة ثنائية كل رأس فيها إما لها ابنان أو ليس لها أي أبناء.**

**نظرية ٤-٩:**

**إذا كانت T شجرة ثنائية تامة عدد رؤوسها الداخلية (internal vertices) يساوي i ، فإن عدد رؤوسها الطرفية (terminal vertices) يساوي i+1 ، وعدد رؤوسها الكلية 2i+1.**

**البرهان:**

**رؤوس T تتكون من نوعين من الرؤوس: رؤوس هي أبناء (children) لوالدٍ ما (of some parent) ، ورؤوس ليست أبناء (لأي والد). وهناك رأس ليست ابنا (nonchild) ونعني بها الجذر (root). وحيث أن عدد الرؤوس الداخلية يساوي i ، ولكلٍّ منها ابنان ، فلذلك عدد الأبناء 2i.**

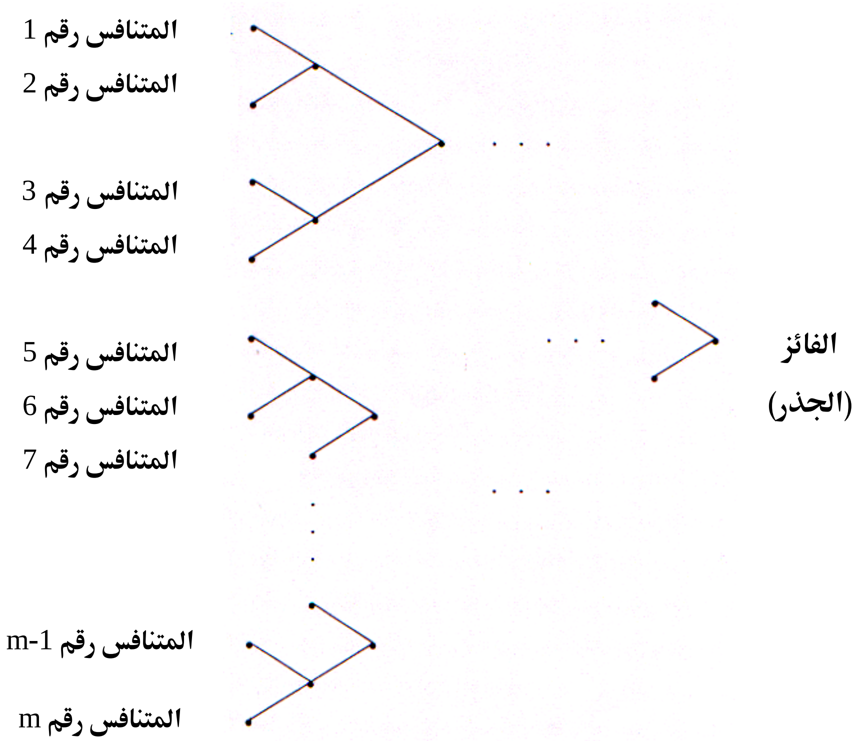
**وهكذا فإن العدد الكلي لرؤوس T يساوي 2i+1. وبناءً عليه فإن عدد الرؤوس الطرفية يساوي**

$$(2i+1) - i = i+1$$

**مثال ٤-٣٨:**

**المخطط البياني التالي لدوري مباريات المتنافسين (contestants) القائم على أساس خروج المغلوب (single-elimination tournament) عبارة عن شجرة ثنائية تامة.**

**في هذا المخطط تظهر أسماء / أرقام المتنافسين على اليسار. ويتقدم الفائزون نحو اليمين. وفي النهاية يكون هناك فائز واحد عند الجذر. وإذا لم يكن عدد المتنافسين إحدى قوى 2 (a power of) فبعض المتنافسين لا يشتركون في بعض الأدوار / الدورات ، كما يظهر في الشكل مثلا مع المتنافس رقم 7 الذي لا يشارك في الدورة الأولى (first-round).**




**مثال ٤-٣٩:**

في دوري مباريات المتنافسين بقاعدة خروج المغلوب (مثال ٤-٣٨) اثبت أنه إذا كان عدد المتنافسين يساوي $n$ فإن العدد الإجمالي لمباريات الدوري يساوي $n-1$.

**الحل:**

عدد المتنافسين $n$ يقابل عدد الرؤوس الطرفية ، وعدد المباريات $i$ يقابل عدد الرؤوس الداخلية. وبتطبيق نظرية ٤-٩ نجد أن

$$n+i = 2i+1$$

أي أن عدد المباريات يساوي

$$i = n - 1$$

النظرية التالية تعطي العلاقة بين عدد الرؤوس الطرفية وارتفاع الشجرة الثنائية.

**نظرية ٤–١٠:**

**إذا كان ارتفاع الشجرة الثنائية يساوي** h **، وعدد رؤوسها الطرفية يساوي** t **،** **فإن**

$$\log_2 t \le h$$

**البرهان:**

**سنثبت بإذن الله المتباينة التالية المكافئة للنتيجة المطلوبة**

$$t \le 2^h \qquad (*)$$

**وذلك بالاستقراء على** h.

**الخطوة الأساسية: نفرض** $h = 0$**. أي أن الشجرة الثنائية تتكون من رأس واحدة** (single vertex)**. في هذه الحالة** $t = 1$ **، وبالتالي المتباينة (*) متحققة** $(1 \le 2^0 = 1)$.

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن النتيجة (*) متحققة بالنسبة لشجرة ثنائية ارتفاعها أقل من** h**. نفرض أن** T **شجرة ثنائية ارتفاعها** h **، حيث** $h > 0$ **، وعدد رؤوسها الطرفية** t**. وبالنسبة لجذر هذه الشجرة** T:

i) **نفرض أولا أن الجذر له ابن واحد فقط. إذا حذفنا** (eliminate) **الجذر والحرف** (edge) **الواقع على الجذر** (incident on the root) **، فإن الشجرة الناتجة سيكون ارتفاعها** h-1 **وعدد أطرافها هو نفسه عدد أطراف** T**. وبتطبيق فرض الخطوة الاستقرائية:** $t \le 2^{h-1}$

**وحيث أن** $2^{h-1} < 2^h$

**فلذلك** $t < 2^h$

**أي أن النتيجة (*) متحققة في هذه الحالة.**

ii) **نفرض الآن أن جذر الشجرة** T **له ابنان** $v_1, v_2$ **. ونفرض أن** $T_i$ **هي الشجرة الفرعية ذات الجذر** $v_i$ **، وأن ارتفاع** $T_i$ **يساوي** $h_i$ **، وعدد رؤوسها الطرفية يساوي** $t_i$ **، حيث** $i = 1, 2$.

**بتطبيق فرض الخطوة الاستقرائية:**

$$t_i \le 2^{h_i}, \qquad i = 1, 2 \qquad (1)$$

**وحيث أن رؤوس** T **الطرفية تتكون من رؤوس** $T_1$ **الطرفية ورؤوس** $T_2$ **الطرفية ، فلذلك**

$$t = t_1 + t_2 \qquad (2)$$

**من العلاقتين** (2) , (1) **نجد أن**

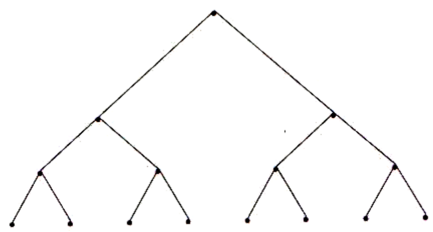
$$\begin{aligned} t = t_1 + t_2 &\le 2^{h_1} + 2^{h_2} \\ &\le 2^{h-1} + 2^{h-1} \\ &= 2^h \end{aligned}$$

**أي أننا تحققنا من صحة الخطوة الاستقرائية ، وبالتالي يكتمل برهان النظرية.**

**مثال ٤-٤٠:**

**الشجرة الثنائية المبينة بالشكل التالي ارتفاعها:** $h = 3$ **، وعدد أطرافها** (number of terminals): $t = 8$ **. وبالنسبة لهذه الشجرة فإن متباينة نظرية ٤-١٠ تصبح مساواة حيث أن**

$$\log t = \log 8 = 3 = h$$



## أشجار البحث الثنائية
## Binary Search Trees

**نفرض أن لدينا مجموعة** S **من عناصر يمكن ترتيبها** (can be ordered)**. مثلا إذا كانت** S **تتكون من أعداد فيمكننا استخدام الترتيب العادي للأعداد ، وإن كانت** S **تتكون من سلاسل رموز أبجدية** (strings of alphabetic characters)

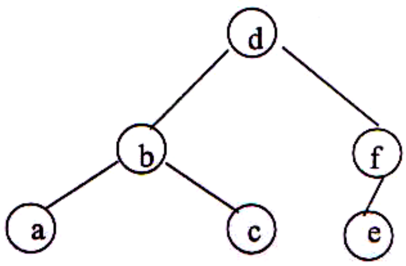
**يمكننا استخدام الترتيب المعجمي** (lexicographic order) **وتُستخدم الأشجار الثنائية على نطاق واسع في علم الحاسوب لتخزين عناصر من مجموعة مرتبة** (ordered set) **كمجموعة أعداد** (set of numbers) **مثلا أو مجموعة سلاسل** (strings)**. وإذا تم تخزين عنصر البيانات** d(v) (data item) **في الرأس** v ، **وعنصر البيانات** d(w) **في الرأس** w ، **فإذا كانت** v **هي الابن الأيسر (أو الأيمن) للرأس** w **فسنضمن وجود علاقة ترتيب معينة** (some ordering relationship) **بين** d(v), d(w) **. وتعد شجرة البحث الثنائية مثالا لهذه العلاقة.**

**تعريف:**

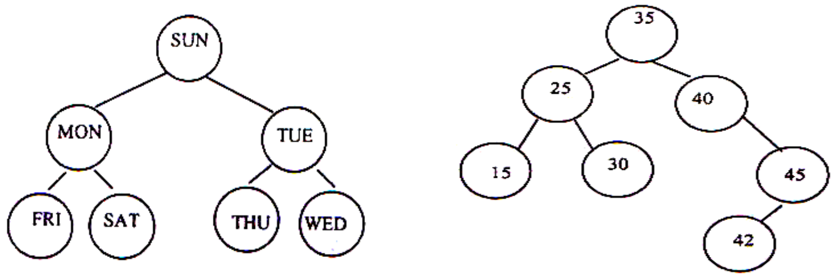
**شجرة البحث الثنائية (binary search tree) هي شجرة ثنائية** T **البيانات** (data) **فيها مرتبطة بالرؤوس** (associated with the vertices)**. والبيانات مُرَتبة** (arranged) **بحيث أنه بالنسبة لكل رأس** v **في** T**: أي عنصر بيانات** (data item) **في الشجرة الفرعية اليسرى للرأس** v **أصغر من** (less than) **عنصر البيانات في** v ، **وأي عنصر بيانات في الشجرة الفرعية اليمنى للرأس** v **أكبر من** (greater than) **عنصر البيانات في** v.

**مثال ٤-٤١:**

**الأشكال التالية تعطي أمثلة لأشجار البحث الثنائية.**




**(أ) شجرة عناصرها حروف**



(ب) شجرة عناصرها أعداد صحيحة

(ج) شجرة عناصرها سلاسل رموز

**أمثلة لأشجار بحث ثنائية**

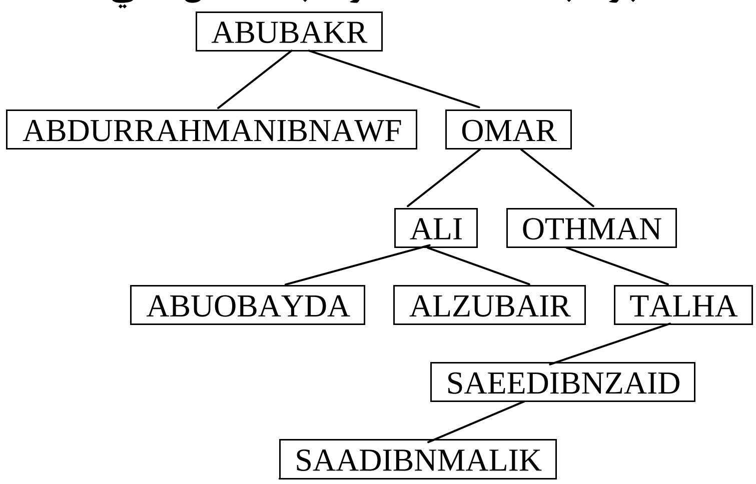
**مثال ٤-٤٢:**

**ارسم شجرة بحث ثنائية T تحتوي على أسماء العشرة المبشرين بالجنة ، بحيث يتم إنشاء الشجرة عن طريق إدخال الأسماء بالترتيب التالي:**

ABUBAKR OMAR OTHMAN ALI TALHA
ALZUBAIR SAEEDIBNZAID ABUOBAYDA
SAADIBNMALIK ABDURRAHMANIBNAWF

**الحل:**

**شجرة البحث الثنائية المطلوبة مبينة بالشكل التالي:**



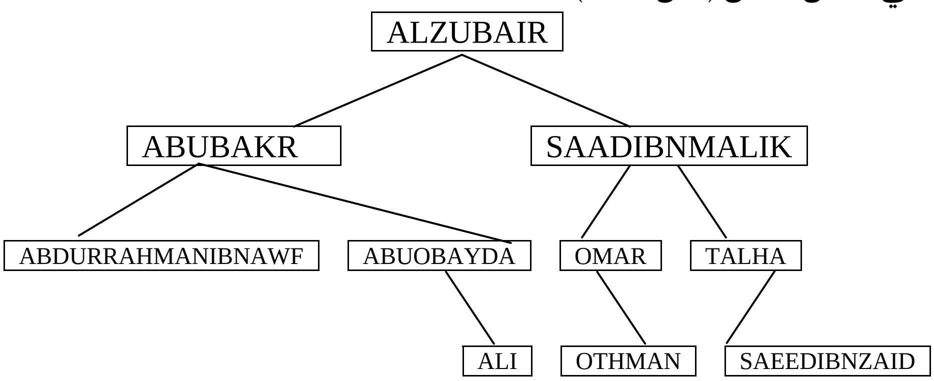
**شجرة بحث ثنائية T**

**لتخزين أسماء العشرة المبشرين بالجنة**

**لاحظ أنه بالنسبة لأي رأس v: أي عنصر بيانات في الشجرة الفرعية اليسرى للرأس v أصغر من [أي: أبجديا يسبق (precedes alphabetically)] عنصر البيانات**

في v ، وأي عنصر بيانات في الشجرة الفرعية اليمنى للرأس v أكبر من عنصر البيانات في v.

وعموماً إذا لم يُشترط إدخال البيانات بترتيب معين فهناك طرق عديدة لوضع البيانات في شجرة بحث ثنائية. فمثلاً الشكل التالي يعرض شجرة بحث ثنائية أخرى لتخزين أسماء العشرة المبشرين بالجنة المعطاة في المثال السابق (مثال ٤-٤٢).




شجرة بحث ثنائية أخرى $T'$

لتخزين أسماء العشرة المبشرين بالجنة

وأما إنشاء (constructing) شجرة البحث الثنائية T فقد تم باتباع الخطوات التالية:

- نبدأ بشجرة خالية (empty tree) ، أي بشجرة ليس فيها أي رأس (vertex) أو أي حرف (edge).
- ثم نأخذ الأسماء بترتيب ظهورها من اليسار لليمين اسما اسما: ABUBAKR ، ثم OMAR ، ثم OTHMAN ، ... الخ. حيث نبدأ بإنشاء رأس (creating a vertex) ، ووضع الاسم الأول ABUBKAR في هذه الرأس ، ونسمِّيها "الجذر" (root).
- وبالنسبة لكل كلمة (word) / اسم تالي في قائمة الأسماء / الكلمات المعطاة نضيف رأسا v وحرفا إلى الشجرة ، ونضع الاسم في الرأس v.

ولتحديد أين نضيف الرأس والحرف نبدأ عند الجذر. فإن كانت الكلمة المطلوب إضافتها أصغر من (حسب الترتيب المعجمي) الكلمة الموجودة بالجذر ، فإننا نتحرك نحو الابن الأيسر. وأما إن كانت الكلمة المطلوب إضافتها أكبر من الكلمة بالجذر ، فإننا نتحرك نحو الابن الأيمن. فإن لم يكن هناك أي ابن (no child) ، فإننا ننشئ واحدا ، ونضع حرفا (edge) يلاقي (incident on) كلاً من الجذر والرأس الجديد ، ونضع الكلمة في الرأس الجديد. وأما إن كان هناك ابن v ، فإننا نكرر هذه العملية. أي أننا نقارن الكلمة المطلوب إضافتها بالكلمة الموجودة في v ، ونتحرك نحو ابن v الأيسر إن كانت الكلمة المطلوب إضافتها أصغر من الكلمة الموجودة في v ، وإلا فإننا نتحرك نحو ابن v الأيمن. فإن لم يكن هناك ابن نتحرك نحوه ، فإننا ننشئ واحدا ونضع حرفا (edge) يلاقي كلا من v والرأس الجديد ، ونضع الكلمة في الرأس الجديد. وإن كان هناك ابن نتحرك نحوه فإننا نكرر هذه العملية. وأخيرا نضع الكلمة في الشجرة.

- ثم نأخذ الكلمة التالية في القائمة ، ونقارنها بالجذر ، ونتحرك يسارا أو يمينا ، ونقارنها بالرأس الجديد ، ونتحرك يسارا أو يمينا ، ... وهكذا. وأخيرا نخزنها في الشجرة.
- نستمر في هذه الطريقة إلى أن يتم تخزين جميع الكلمات في الشجرة ، وهكذا نكون قد أنشأنا (created) شجرة بحث ثنائية.

الخوارزمية التالية توضح خطوات هذه الطريقة لإنشاء شجرة بحث ثنائية.

## خوارزمية إنشاء شجرة بحث ثنائية

## Constructing a Binary Search Tree (BST) Algorithm

هــذه الخوارزميــة تقــرأ (reads) المــدخلات (input) بالترتيــب المعطَــى (submitted order). وبعد قراءة كل كلمة تقوم الخوارزمية بإدخالها (inserting it) في الشجرة.

**المدخلات:** متتاليـة: (a sequence) $w_1, w_2, \cdots, w_n$ مـن كلمـات مختلفـة (distinct words) ، وطول المتتالية: n (length of the sequence).

**المخرجات:** شجرة بحث ثنائية T.

**الإجراء:**

```
procedure make_bin_search_tree(w, n)
    let T be the tree with one vertex, root
    store w_1 in root
    for i := 2 to n do
        begin
        v := root
        search := true     // find spot for w_i
        while search do
            begin
            s := word in v
            if w_i < s then
                if v has no left child then
                    begin
                    add a left child ℓ to v
                    store w_i in ℓ
                    search := false    // end search
                    end
                else
                    v := left child of v
                else    // w_i > s
                    if v has no right child then
                        begin
                        add a right child r to v
                        store w_i in r
                        search := false    // end search
                        end
                    else
                        v := right child of v
```

```
            end     // while
        end     // for
    return (T)
end make_bin_search_tree
```

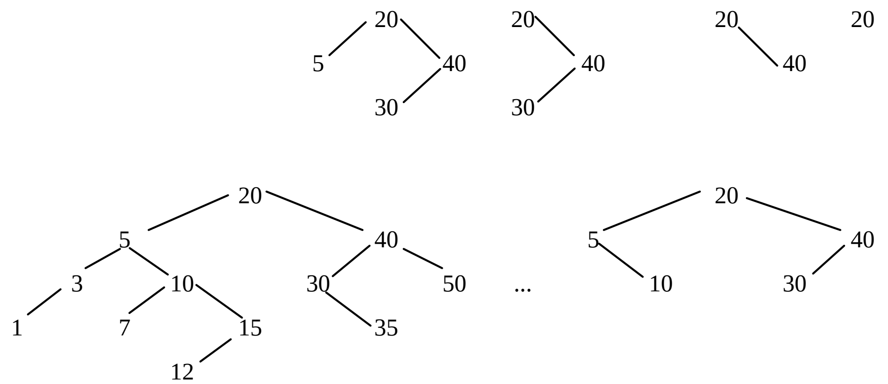
**مثال ٤-٤٣:**

**نقوم في هذا المثال بإنشاء شجرة بحث ثنائية تحتوي على العناصر الاثني عشر الآتية (بالترتيب المعطَى):**

20, 40, 30, 5, 10, 35, 3, 15, 50, 12, 7, 1

**الحل:**

**نبدأ بشجرة خالية ثم نقوم بإضافة العناصر عنصراً عنصراً بالترتيب المذكور نفسه لنحصل على:**




**البحث في شجرة بحث ثنائية** **Searching a BST**

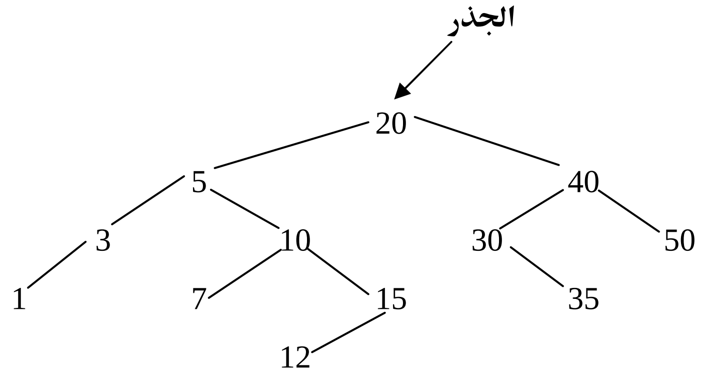
**تفيد أشجار البحث الثنائية كثيرا في البحث عن البيانات وتعيين مواقعها** (locating data) **، بمعنى أنه إذا أُعطينا عنصر بيانات** D (data item) **يمكننا بسهولة تحديد ما إذا كان العنصر** D **موجودا في شجرة بحث ثنائية** BST **أم لا ، وإن كان موجودا فأين موقعه.**

**ولتحديد ما إذا كان عنصر بيانات** D **موجودا في شجرة بحث ثنائية أم لا فإننا نبدأ عند الجذر. وتكراريا** (repeatedly) **نقارن العنصر** D **بعنصر البيانات الموجود في الرأس الحالية** (current vertex)**. فإن كان** D **مساويا لعنصر البيانات**

في الرأس الحالية فهذا يعني أننا قد وجدنا D (found) ثم نتوقف. وإن كان D أصغر من عنصر البيانات في الرأس الحالية v فإننا نتحرك نحو الابن الأيسر للرأس v ، ونكرر هذه العملية. وإن كان D أكبر من عنصر البيانات في الرأس الحالية v فإننا نتحرك نحو الابن الأيمن للرأس v ، ونكرر العملية. وفي أي خطوة من الخطوات إذا لم نجد الابن الذي نتحرك نحوه (missing) ، فإننا نستنتج أن D غير موجود بالشجرة.

**مثال ٤-٤٤:**

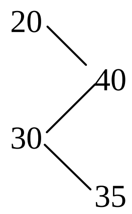
وضح مسار البحث في الشجرة المبينة بالشكل التالي عن كل من العناصر: 35, 1, 8, 40, 60.



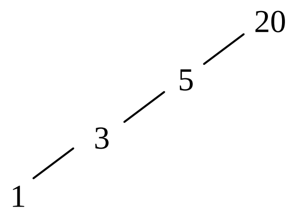

**الحل:**

نبدأ عند جذر الشجرة ونقارن العنصر (35) مع العنصر الموجود بالجذر: فإذا تساوى العنصران ننهي البحث. أما إذا كان العنصر (35) أصغر من العنصر الموجود في جذر الشجرة فإننا نتحرك يسارا (لماذا ؟) وإلا نتحرك يمينا. ونستمر في هذه العملية متابعين مسارا محددا للبحث حتى نصل إلى عنصر في الشجرة يساوي العنصر المطلوب أو نصل إلى إحدى الأوراق وعندها ينتهي البحث أيضا.

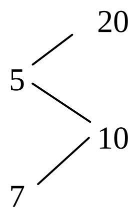
وكل من الأشكال الآتية يوضح المسار الخاص بالبحث عن عنصر معين ، وذلك في حالات مختلفة كما هو مبين:



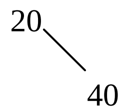

مسار البحث عن 35
العنصر "موجود "



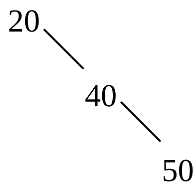

مسار البحث عن 1
العنصر "موجود "




مسار البحث عن 8
العنصر " غير موجود "




مسار البحث عن 40
العنصر "موجود "




مسار البحث عن 60
العنصر " غير موجود "

ونلاحظ من هذه الأمثلة أن طول مسار البحث لا يتعدى ارتفاع الشجرة. كما نلاحظ أن البحث ينتهي أحيانا عند أحد العناصر الداخلية في الشجرة (أي حالات هذه ؟).

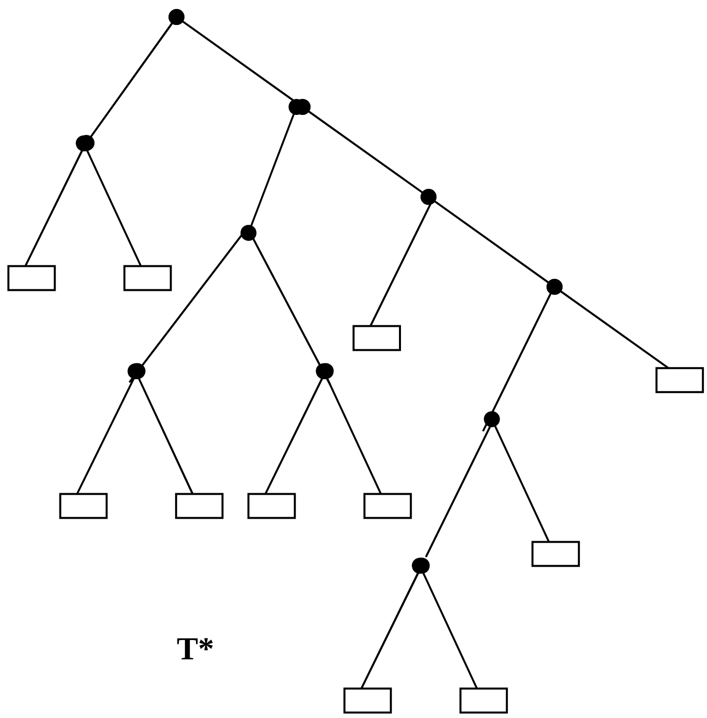
معلوم أن الوقت المستغرَق في البحث عن عنصر بيانات في شجرة بحث ثنائية يكون أطول ما يمكن عندما يكون هذا العنصر غير موجود بالشجرة ، ونتبع أطول مسار (follow a longest path) من الجذر. وبالتالي فإن أكبر وقت (maximum time) للبحث عن عنصر بيانات في شجرة بحث ثنائية يتناسب تقريبا مع (approximately proportional to) ارتفاع الشجرة. ولذلك فإذا كان ارتفاع شجرة البحث الثنائية صغيرا (small) ، فإن عملية البحث في الشجرة ستكون دائما سريعة جدا. وهناك عمليا طرق عديدة معلومة لتقليل (minimizing) ارتفاع شجرة البحث الثنائية إلى أقل قيمة ممكنة.

وبالنسبة لموضوع البحث في أسوأ حالة (worst-case searching) في شجرة بحث ثنائية: نفرض أن T شجرة بحث ثنائية عدد رؤوسها n. ونفرض أن *T

**هي الشجرة الثنائية التامة** (full binary tree) **التي نحصل عليها من الشجرة** T **عن طريق إضافة أبناء يساريين ويمينيين إلى الرؤوس الموجودة** (existing vertices) **في** T **كلما أمكن ذلك. فمثلا:**

**مثال ٤-٤٥:**

**الشكل التالي يعطي الشجرة الثنائية التامة** *T **التي نحصل عليها بتعديل شجرة البحث الثنائية** T **التي تحتوي على أسماء العشرة المبشرين بالجنة في حل مثال ٤-٤٢ ، حيث المستطيلات في الشجرة الثنائية التامة** *T **تمثل الرؤوس المضافة** (added vertices).




**توسيع شجرة البحث الثنائية إلى شجرة ثنائية تامة**

**ويلاحظ أن البحث " غير الناجح "** (unsuccessful search) **في الشجرة** T **[أي البحث الذي لا نعثر فيه على العنصر الذي نبحث عنه] يقابل / يعني الوصول إلى رأس مضافة (أي مستطيل) في الشجرة التامة** *T.

وإذا عَرَّفنا الوقت اللازم لتنفيذ إجراء البحث في أسوأ حالة (worst-case time needed to execute the search procedure) بأنه ارتفاع الشجرة التامة *T والذي نرمز له بالرمز h ، فبنظرية ٤–١٠:

$$\log t \leq h$$

حيث t هي عدد الرؤوس الطرفية (terminal vertices) في *T. وأما عدد الرؤوس الداخلية (internal vertices) في الشجرة الثنائية التامة *T فيساوي n. وبتطبيق نظرية ٤–٩ نجد أن

$$t = n + 1$$

وهكذا ففي أسوأ حالة (in the worst case) يكون الوقت مساويا – على الأقل (at – least) للقيمة

$$\log t = \log (n+1)$$

ويمكننا إثبات أنه إذا بلغ ارتفاع الشجرة T أقل قيمة ممكنة (minimized) ، فإن أسوأ حالة تتطلب وقتا يساوي $\lceil \log (n+1) \rceil$. مثلا: نظرا لأن $\lceil \log (2{,}000{,}000+1) \rceil = 21$ فمن الممكن تخزين مليوني عنصر في شجرة بحث ثنائية ، والوصول إلى نتيجة البحث عن عنصر معين (إما الوصول إليه ومعرفة أنه موجود وتعيين موقعه ، أو تحديد أنه غير موجود) في عدد من الخطوات (steps) يساوي – على الأكثر (at most) – 21 خطوة (steps).

## سابعا: الاجتياز الشامل للأشجار
## Tree Traversals

المقصود من عملية الاجتياز الشامل لشجرة ثنائية أن نقوم بزيارة كل عنصر من عناصر الشجرة بطريقة منظمة ، ونقوم بتنفيذ عملية محددة في كل عنصر مثل طباعة البيانات الخاصة بالعنصر. وقد رأينا سابقا أن كلا من إجراء البحث بالعرض – أولا وإجراء البحث بالعمق – أولا يؤدي إلى اجتياز شجرة بطريقة منظمة بحث نزور كل رأس في الشجرة مرة واحدة بالضبط. وفيما يلي نناقش ثلاث طرق إضافية

لاجتياز الأشجار ، وسنعرِّف طرق الاجتياز هذه ارتداديا / رجوعيا (recursively).

وهذه الطرق هي:

- الاجتياز الترتيبي (inorder traversal)
- الاجتياز سابق الترتيب (preorder traversal)
- الاجتياز لاحق الترتيب (postorder traversal)

والتي تعرف كما يلي :

**(أ) الاجتياز الترتيبي** **Inorder traversal**

ويعرف كالتالي :

إذا لم تكن الشجرة خالية فإننا نقوم بتنفيذ ما يلي بالترتيب:

١- زيارة عناصر الشجرة الفرعية اليسرى (مستخدمين الأسلوب نفسه) .

٢- زيارة جذر الشجرة.

٣- زيارة عناصر الشجرة الفرعية اليمنى (مستخدمين الأسلوب نفسه).

**(ب) الاجتياز سابق الترتيب** **Preorder traversal**

ويعرف كالتالي :

إذا لم تكن الشجرة خالية فإننا نقوم بتنفيذ ما يلي بالترتيب:

١- زيارة الجذر.

٢- زيارة عناصر الشجرة الفرعية اليسرى (مستخدمين الأسلوب نفسه).

٣- زيارة عناصر الشجرة الفرعية اليمنى (مستخدمين الأسلوب نفسه).

**(ج) الاجتياز لاحق الترتيب** **Postorder traversal**

ويعرف كالتالي :

إذا لم تكن الشجرة خالية فإننا نقوم بتنفيذ ما يلي بالترتيب:

١- زيارة عناصر الشجرة الفرعية اليسرى (مستخدمين الأسلوب نفسه).

٢- زيارة عناصر الشجرة الفرعية اليمنى (مستخدمين الأسلوب نفسه).

٣- زيارة الجذر .

ونلاحظ أنه بتطبيق أي من هذه الطرق الثلاث على شجرة خالية فإننا لا نحصل على أي نتيجة ، وبتطبيقها على شجرة بها عنصر واحد فإننا نقوم بزيارة هذا العنصر الوحيد.

ونلاحظ الطبيعة الإرجاعية (recursive) للتعريف.

ويمكن تذكر الطرق الثلاث باختصار كما يلي :

أ ) الاجتياز الترتيبى : اليسار فالجذر فاليمين.

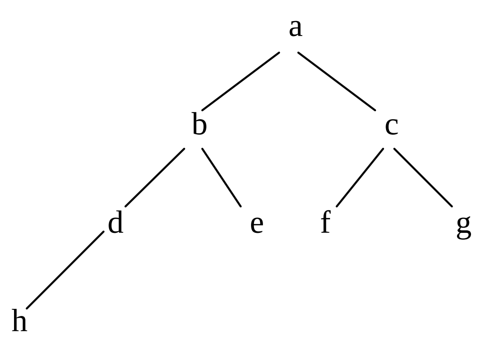
ب) الاجتياز سابق الترتيب : الجذر فاليسار فاليمين.

ج ) الاجتياز لاحق الترتيب : اليسار فاليمين فالجذر.

أو بأسلوب آخر : في الاجتياز سابق الترتيب يأتي الجذر سابقا للاتجاه من الشجرة اليسرى إلى اليمنى ، وفى الاجتياز لاحق الترتيب يأتي الجذر لاحقا بعد الاتجاه من الشجرة اليسرى إلى اليمنى ، وفى الاجتياز الترتيبى يأتي الجذر في الترتيب بعد زيارة الشجرة اليسرى وقبل الاتجاه للشجرة اليمنى.

**مثال ٤-٤٦:**

بتطبيق كل من الطرق الثلاث لاجتياز الشجرة المبينة بالشكل التالي:




نحصل على النتائج التالية:

الاجتياز الترتيبى : h d b e a f c g

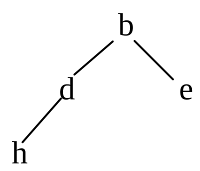
الاجتياز سابق الترتيب : a b d h e c f g

الاجتياز لاحق الترتيب : h d e b f g c a

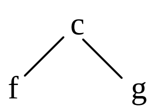
**وفيما يلي تفصيل كيفية الحصول على نتائج الاجتياز سابق الترتيب (preorder):**

**(١) نزور الجذر لنحصل على :** a

**(٢) ثم نزور الشجرة الفرعية اليسرى :**



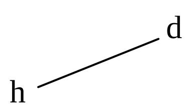

**(٣) وأخيرا نزور الشجرة الفرعية اليمنى :**




**وأما تفاصيل الخطوة رقم (٢) فهي كالتالي :**

**(٢ – ١) نزور الجذر لنحصل على :** b

**(٢ – ٢) ثم نزور الشجرة الفرعية اليسرى :**



(٢ – ٣) وأخيرا نزور الشجرة الفرعية اليمنى لنحصل على : e .

وتفاصيل الخطوة رقم (٢ – ٢) هي :

(٢ – ٢ – ١) نزور الجذر لنحصل على : d.

(٢ – ٢ – ٢) ثم نزور الشجرة الفرعية اليسرى فنحصل على : h.

(٢ – ٢ – ٣) وأخيرا نزور الشجرة الفرعية اليمنى (وهى خالية).

حتى الآن حصلنا على النتيجة الجزئية:

a b d h e

يتبقى لدينا الخطوة رقم (٣) ، حيث نقوم بما يلي :

(٣ – ١) زيارة الجذر ونحصل على : c .

(٣ – ٢) ثم زيارة الشجرة الفرعية اليسرى ونحصل على : f .

(٣ – ٣) وأخيرا زيارة الشجرة الفرعية اليمنى ونحصل على : g .

وبالتالي تكون النتيجة النهائية هي

a b d h e c f g

ويمكننا تطبيق أسلوب مماثل مع كل من الاجتياز الترتيبى والاجتياز لاحق الترتيب.

وفيما يلي نعطي إجراءات (procedures) هذه الخوارزميات الثلاث.

## خوارزمية الاجتياز سابق الترتيب

## Preorder Traversal Algorithm

هذه الخوارزمية الارتدادية تشغّل (processes) رؤوس شجرة ثنائية باستخدام الاجتياز سابق الترتيب.

المدخلات: PT: جذر شجرة ثنائية.

المخرجات: تعتمد على كيفية تفسير "التشغيل" (process) في السطر رقم 3 في الإجراء التالي.

**الإجراء:**

```
     procedure preorder(PT)
1.     if PT is empty then
2.       return
3.     process PT
4.     ℓ := left child of PT
5.     preorder(ℓ)
6.     r := right child of PT
7.     preorder(r)
     end preorder
```

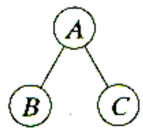
**والآن نوضح كيفية تنفيذ هذا الإجراء مبتدئين بمناقشة بعض حالاته البسيطة.**

أ) **فإذا كانت الشجرة الثنائية خاوية ، فلا يتم تشغيل أي شيء ويتم الرجوع ببساطة عند السطر رقم** 2.

ب) **وإن كانت المدخلات شجرة مكونة من رأس واحدة فقط ، فإننا نجعل الجذر** PT **ونستدعي الإجراء** (PT) preorder. **وحيث أن الشجرة** PT **ليست خاوية فإننا ننتقل إلى السطر رقم** 3 **حيث نقوم بتشغيل الجذر [قد يكون تشغيله مثلا هو عملية طباعته].**

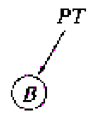
- **في السطر رقم** 5 **نستدعي الإجراء** preorder **حيث** PT **يكون مساويا للابن الأيسر (الخالي) للجذر** [ (empty) left child of the root]. **إلا أننا قد رأينا في أ) أنه عندما تكون المدخلات للإجراء** preorder **شجرة خاوية فلا نقوم بتشغيل أي شيء.**
- **وبالمثل في السطر رقم** 7 **نُدخل شجرة خاوية للإجراء** preorder **ولا يتم تشغيل أي شيء.**
- **وهكذا فعندما تكون المدخلات شجرة مكونة من رأس واحدة فقط ، فإننا نقوم بتشغيل الجذر ثم نرجع** (return).

ج) **وإن كانت المدخلات هي الشجرة المبينة بالشكل التالي:**




**فإننا نجعل الجذر** PT **ونستدعي** (PT) preorder. **وحيث أن الشجرة** PT **ليست خاوية ، فإننا نتقدم إلى السطر** 3 **حيث نقوم بتشغيل الجذر.**

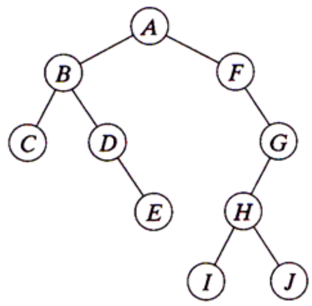
- **في السطر** 5 **نستدعي** preorder **حيث** PT **يكون مساويا للابن الأيسر للجذر (انظر الشكل التالي).**




- **وقد رأينا في ب) أنه عندما تكون مدخلات الإجراء** preorder **شجرة مكونة من رأس واحدة فقط فإن الإجراء** preorder **يقوم بتشغيل هذه الرأس. وهكذا فإننا نقوم بعد ذلك بتشغيل الرأس** B.
- **وبالمثل ففي السطر** 7 **نقوم بتشغيل الرأس** C.
- **وهكذا فإن رؤوس الشجرة يتم تشغيلها بالترتيب** ABC.

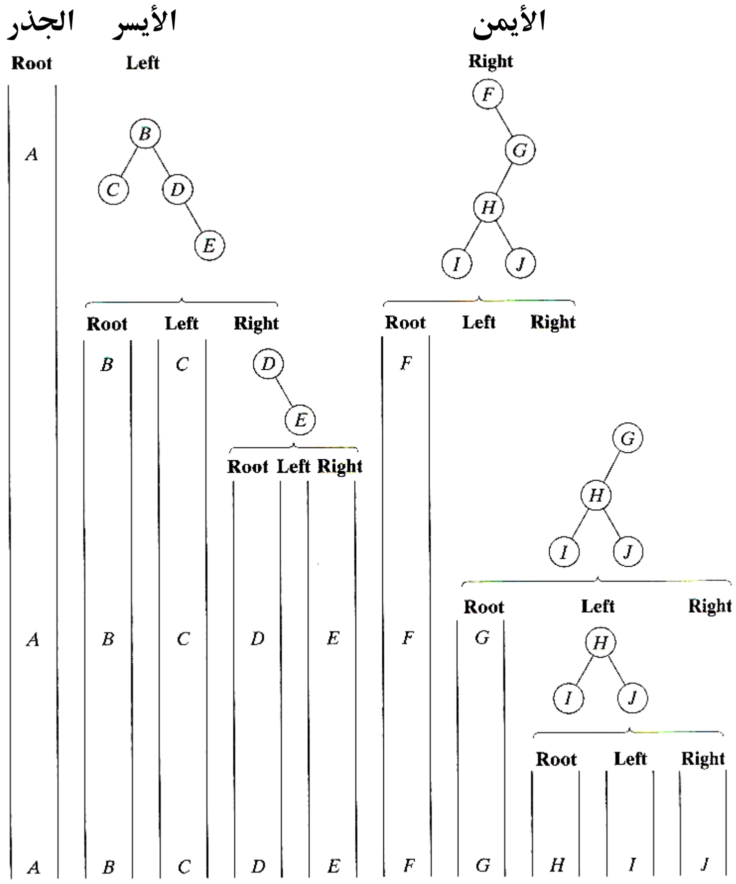
**مثال ٤-٤٧:**

**بأي ترتيب يتم تشغيل رؤوس الشجرة الثنائية المبينة بالشكل التالي بفرض أننا سنستخدم الاجتياز سابق الترتيب ؟**




**الحل:**

**باتباع السطور** 7 → 3 **[الجذر فالأيسر فالأيمن** (root/left/right)] ، **نرى أن الاجتياز يتقدم بالترتيب المبين بالشكل التالي. وهكذا فإن ترتيب التشغيل** (order of processing) **هو:** ABCDEFGHIJ




وهناك النوعان الآخران من الاجتياز وهما: الاجتياز الترتيبي (inorder traversal) ، والاجتياز لاحق الترتيب (postorder traversal) ويمكن الحصول على أي منهما من خوارزمية الاجتياز سابق الترتيب (preorder traversal) المذكورة سابقا بمجرد تغيير موضع السطر رقم 3 (الجذر). ويلاحظ أن أجزاء الكلمات: "pre" / "in" / "post" تشير إلى موضع الجذر في الاجتياز ، حيث preorder ≡ سابق الترتيب تعني: الجذر أولا ، أي الجذر يسبق ، و inorder ≡ الترتيبي تعني: الجذر ثانيا ، وpostorder ≡ لاحق الترتيب تعني: الجذر أخيرا أي يلحق فيما بعد.

## خوارزمية الاجتياز الترتيبي

## Inorder Traversal Algorithm

هذه الخوارزمية الارتدادية (recursive) تقوم بتشغيل رؤوس شجرة ثنائية باستخدام الاجتياز الترتيبي.

**المدخلات:** PT: جذر شجرة ثنائية.

**المخرجات:** تعتمد على كيفية تفسير "التشغيل" (process) في السطر رقم 5 في الإجراء التالي:

**الإجراء:**

```
   procedure inorder (PT)
1.   if PT is empty then
2.     return
3.   ℓ := left child of PT
4.   inorder(ℓ)
5.   process PT
6.   r := right child of PT
7.   inorder(r)
   end inorder
```

**مثال ٤-٤٨:**

بأي ترتيب يتم تشغيل رؤوس الشجرة الثنائية المبينة في المثال السابق (مثال ٤-٤٧) بفرض أننا سنستخدم الاجتياز الترتيبي ؟

**الحل:**

بإتباع السطور $7 \rightarrow 3$ [الأيسر فالجذر فالأيمن (left/root/right)] ، نرى أن الاجتياز يعطينا القائمة الترتيبية (inorder listing):

CBDEAFIHJG

## خوارزمية الاجتياز لاحق الترتيب

## Postorder Traversal Algorithm

هذه الخوارزمية الارتدادية تقوم بتشغيل رؤوس شجرة ثنائية باستخدام الاجتياز لاحق الترتيب.

**المدخلات:** PT: جذر شجرة ثنائية.

**المخرجات:** تعتمد على كيفية تفسير "التشغيل" (process) في السطر رقم 7 في الإجراء التالي:

**الإجراء:**

```
     procedure postorder (PT)
1.     if PT is empty then
2.       return
3.     ℓ := left child of PT
4.     postorder(ℓ)
5.     r := right child of PT
6.     postorder(r)
7.     process PT
     end postorder
```

**مثال ٤-٤٩:**

بأي ترتيب يتم تشغيل رؤوس الشجرة الثنائية المبينة في مثال ٤-٤٧ بفرض أننا سنستخدم الاجتياز لاحق الترتيب ؟

**الحل:**

باتباع السطور $3 \rightarrow 7$ [الأيسر فالأيمن فالجذر (left/right/root)] ، نرى أن الاجتياز يعطينا القائمة لاحقة الترتيب (postorder listing):

CEDBIJHGFA

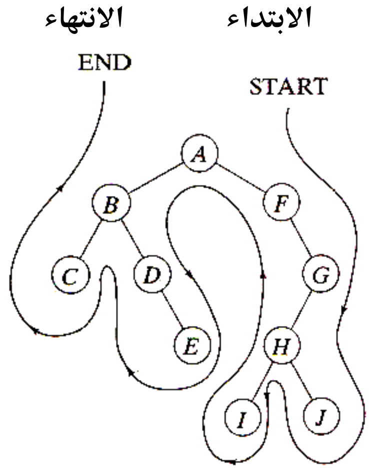
**ملاحظة ١:**

يمكن الحصول على نتيجة الاجتياز سابق الترتيب باتباع المسار (route) المبين بالشكل (ب) التالي ، وعكس نتيجة الاجتياز لاحق الترتيب باتباع المسار المبين بالشكل (أ) التالي.

**ملاحظة ٢:**

إذا تم تخزين البيانات (data) في شجرة بحث ثنائية فإن الاجتياز الترتيبي سيؤدي إلى تشغيل البيانات بالترتيب (in order) ، وذلك لأن التسلسل / التتابع

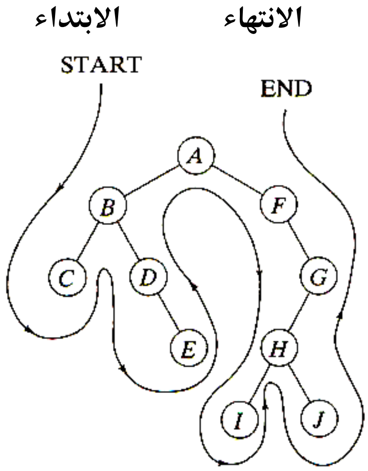
(sequence): **الأيســر فالجــذر فــالأيمن** (left/root/right) **يتفــق مــع ترتيــب** (ordering) **البيانـات في الشـجرة. أي أن الاجتيـاز الترتـيبي لشـجرة بحـث ثنائيـة يؤدي إلى الحصول على عناصر الشجرة مرتبة ترتيبا تصاعديا.**




**(أ)**

**عكس الاجتياز لاحق الترتيب**

Reverse postorder traversal



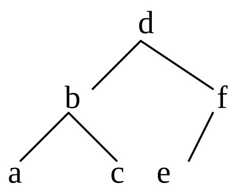

**(ب)**

**الاجتياز سابق الترتيب**

Preorder traversal

**مثال ٤-٥٠:**

**ما هي نتيجة الاجتياز الترتيبي لشجرة البحث الثنائية التالية ؟**




**الحل:نتيجة الاجتياز الترتيبي:** abcdef

## شجرة التعبير الثنائية

## Binary Expression Tree

يمكن استخدام الشجرة الثنائية لتمثيل (representing) التعابير الحسابية (arithmetic expressions). وهذا التمثيل يسهِّل (facilitate) قيام الحاسوب بإيجاد قيم (evaluating) هذه التعابير.

وسنفرض أن المؤثرات (operators) التي نتعامل معها تقتصر على المؤثرات: / , * , - , +

### أنواع التمثيل الرمزي للتعبير الحسابي

هناك ثلاث طرق مختلفة لكتابة تعبير حسابي ويطلق عليها : التمثيل الرمزي الوسطي ، والتمثيل الرمزي اللاحق ، والتمثيل الرمزي السابق. وفيما يلي معنى كل منها :

أ) التمثيل الرمزي الوسطي (infix notation) :

وفيه يكون المؤثر (operator) الحسابي بين المعامَلين (operands) كالمعتاد في الرياضيات ، مثل التعبير a + b.

ب) التمثيل الرمزي اللاحق / المؤخَّر / المعكوس (postfix notation):

[ويطلق عليه أيضا: الاصطلاح البولندي المعكوس (Reverse Polish Notation) RPN]:

وفيه يأتي المؤثر بعد المعاملين ، فمثلا التعبير السابق يكتب هكذا : + a b

ج) التمثيل الرمزي السابق / المقدَّم / البادئ (prefix notation) :

[ويطلق عليه أيضا: الاصطلاح البولندي (Polish Notation)]:

وفيه يأتي المؤثر قبل المعاملين ، فمثلا التعبير السابق يُكتب هكذا: +ab

وفيما يلي أمثلة لتوضيح الفارق بين التمثيلين الرمزي الوسطي والرمزي اللاحق.

**مثال ٤-٥١ :**

**فيما يلي مجموعة من التعابير الحسابية المكتوبة بالتمثيل الرمزي الوسطى وما يقابل كلا منها بالتمثيل الرمزي اللاحق**

| التمثيل الرمزي اللاحق Postfix / RPN | التمثيل الرمزي الوسطي Infix |
|---|---|
| a b c * + | a + b * c |
| a b + c * | (a + b) * c |
| a b c + * | a * (b + c) |
| a b c + * d * | a * (b + c) * d |
| a b + c d e + - * | (a + b) * (c – (d + e)) |

**فالتمثيل الرمزي الوسطي / الصيغة الوسطية** (infix form) **هي الصيغة القياسية** (standard) **المعتادة في كتابة التعابير الحسابية.**

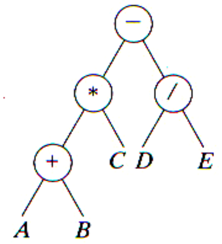
**مثال ٤-٥٢:**

**ارسم الشجرة الثنائية التي تمثِّل التعبير الحسابي**

(A+B)*C – D/E

**الحل:**

**الشجرة الثنائية** T **التالية تمثل التعبير الحسابي المعطَى ، حيث الرؤوس الطرفية** (terminal vertices) **تقابل المعامَلات** (operands) **، بينما الرؤوس الداخلية** (internal vertices) **تقابل المعامِلات / المؤثِّرات** (operators).



T

**في الشجرة الثنائية التي تمثل تعبيراً حسابياً نلاحظ أن أيَّ مؤثر يؤثر على شجرتيه الفرعيتين اليسرى واليمنى. فمثلا في شجرة مثال ٤-٥٢:**

- **في الشجرة الفرعية التي جذرها "/" : مؤثِّر القسمة** (division operator) **يؤثِّر على المعامَلين** D, E **، أي أن** D **تُقْسَم على** E.

- وفي الشجرة الفرعية التي جذرها "*" : مؤثِّر الضرب (multiplication operator) يؤثِّر على الشجرة الفرعية التي جذرها "+" (والتي بدورها تمثِّل تعبيرا) والمعامَل C.

ويلاحظ في الشجرة الثنائية أننا نميِّز (distinguish) بين الشجرة الفرعية اليسرى والشجرة الفرعية اليمنى لأي رأس ، فهما يقابلان (correspond to) المعامَل / التعبير الأيسر والمعامَل / التعبير الأيمن. وهذا التمييز (distinction) بين الأيسر والأيمن مهم في التعابير ، فمثلا 6-4 تختلف عن 4-6.

وإذا قمنا باجتياز الشجرة الثنائية T في مثال ٤-٥٢ اجتيازا ترتيبيا وأدخلنا قوسين لكل عملية (operation) ، فإننا نحصل على:

(((A+B)*C) – (D/E))

ويُطلق على مثل هذه الصيغة " صيغة التعبير تامة الأقواس " (fully parenthesized form of the expression). وفي هذه الصيغة لا نحتاج لتحديد أي العمليات (كالضرب مثلا) تُجرَى قبل العمليات الأخرى (كالجمع مثلا) ، وذلك لأن الأقواس تحدد بدون أي التباس (unambiguously) ترتيب العمليات.

وإذا قمنا باجتياز الشجرة T في مثال ٤-٥٢ اجتيازا لاحق الترتيب (postorder) فإننا نحصل على النتيجة

AB + C*DE/-

وهي في الصيغة اللاحقة للتعبير (postfix form of the expression) / التمثيل الرمزي اللاحق / المعكوس RPN ، حيث الرموز الثلاثة الأولى +AB مثلا تعني جمع A, B. ومن مميزات هذه الصيغة اللاحقة على الصيغة الوسطية أننا حين نستخدم الصيغة اللاحقة لا نحتاج إلى أي أقواس أو إلى أي اصطلاحات بخصوص ترتيب إجراء العمليات ، حيث سيتم حساب قيمة التعبير بدون أي التباس ، ولهذا السبب – ولأسباب أخرى أيضا – فإن كثيرا من المترجمات (compilers) تقوم بترجمة (translating) التعابير من الصيغة الوسطية إلى الصيغة اللاحقة. وكذلك فإن بعض الآلات الحاسبة (calculators) تتطلب إدخال التعابير بالصيغة اللاحقة.

وإذا قمنا باجتياز الشجرة T في مثال ٤-٥٢ اجتيازا سابق الترتيب (preorder) فإننا نحصل على النتيجة

- * + A B C / D E

وهـي في الصـيغة البادئـة / المقدَّمـة للتعـبير (prefix form of the expression) / التمثيل الرمزي السابق. وعند استخدام هذه الصيغة البادئة فإننا – كالحـال عنـد اسـتخدام الصـيغة اللاحقـة – لا نحتـاج إلى أي أقـواس أو إلى أي اصطلاحات بخصوص ترتيب إجراء العمليات.

# تمرينات رقم ٤

## أولا: المخططات البيانية

٤-١ في دوري المباريات (tournament) بين الفرق المختلفة ، فاز الفريق S على الفريق P مرة واحدة ، وفاز الفريق K على الفريق T مرة واحدة ، وفاز الفريق S على الفريق K مرتين ، وفاز الفريق P على الفريق T مرة واحدة ، وفاز الفريق P على الفريق S مرة واحدة. ارسم مخططا بيانيا لتمثيل دوري المباريات ، حيث رؤوس المخطط تمثل الفرق ، وأحرف المخطط تعني ما يلي [من أ) إلى د)]. صِف (describe) نوع المخطط (kind of graph) [مثلا: مخطط بياني غير مُوَجَّه ، مخطط بياني مُوَجَّه ، مخطط بياني بسيط].

أ) يوجد حرف بين أي فريقين إذا لعب الفريقان معا.

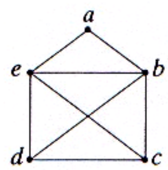
ب) يوجد حرف بين أي فريقين لكل مباراة بينهما.

ج) يوجد حرف من الفريق $t_i$ إلى الفريق $t_j$ إذا فاز الفريق $t_i$ على الفريق $t_j$ مرة واحدة على الأقل.

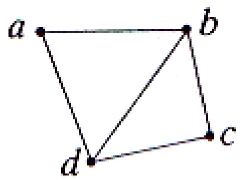
د) يوجد حرف من الفريق $t_i$ إلى الفريق $t_j$ لكل فوز للفريق $t_i$ على الفريق $t_i$.

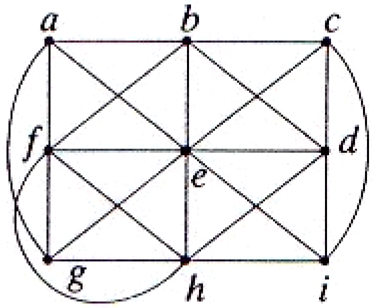
٤-٢ اذكر لماذا لا يوجد مسار (path) من a إلى a يمر بكل حرف (edge) مرة واحدة بالضبط في أي من المخططات التالية.

(أ)



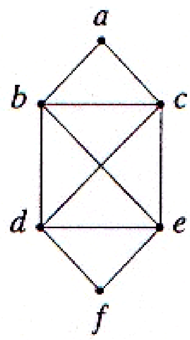

(ب)



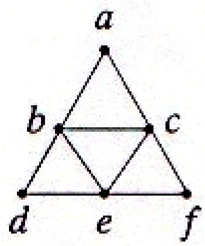



(ج)

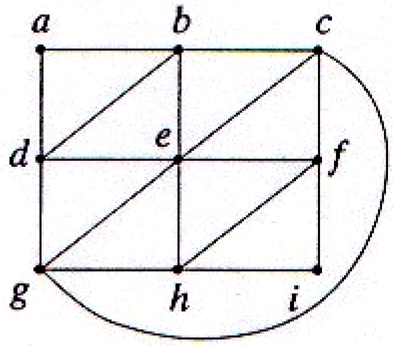
٤-٣ **اثبت أن أي مخطط من المخططات البيانية التالية يحتوي على مسار من a إلى a يمر بكل حرف من أحرف المخطط مرة واحدة بالضبط ، وذلك عن طريق إيجاد مثل هذا المسار بفحص (inspecting) المخطط.**




(أ)



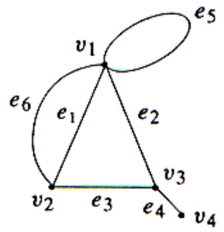

(ب)



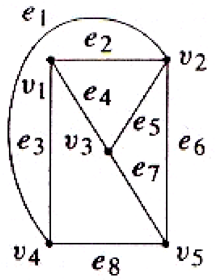

(ج)

٤-٤ **لكل مخطط بياني $G = (V, E)$ من المخططات التالية أوجد:** $V, E$ **، وجميع الأحرف المتوازية** (parallel edges) **، وجميع العُرَى ، وجميع الرؤوس المعزولة** (isolated vertices)**. واذكر ما إذا كان** G **مخططا بسيطا أم لا. واذكر أيضا على أي الرؤوس يقع الحرف** $e_1$ .

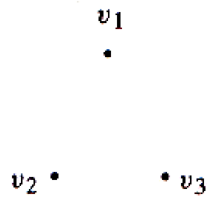
(أ)




(ب)




(ج)



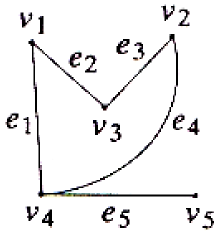

٤-٥ أ) **ارسم المخططين البيانيين التامين** $K_3, K_5$ .

ب) **أوجد صيغة لعدد الأحرف في** $K_n$ .

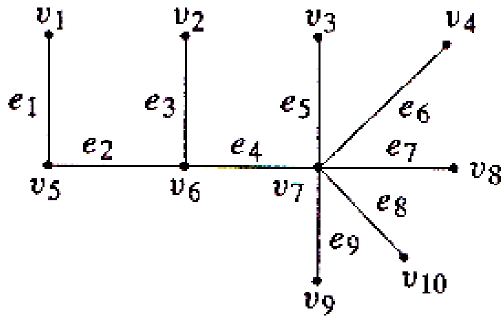
ج) **اعط مثالا لمخطط بياني ثنائي الفرع** (bipartite graph) **(مختلف عن المعطَى في مثال ٤-٨). حدد مجموعتي الرؤوس المنفصلتين** (disjoint vertex sets).

٤-٦ أي المخططات البيانية التالية تعد مخططات ثنائية الفرع (bipartite graphs)؟ إن كان المخطط ثنائيّ الفرع فحدد مجموعتي الرؤوس المتباعدتين (disjoint vertex sets).

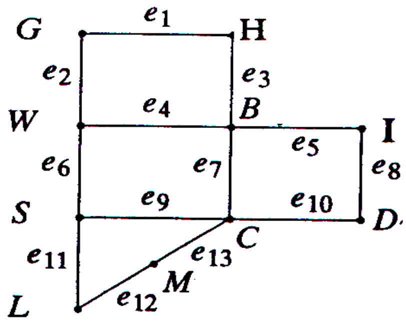
أ)




ب)




ج)




د) مخطط مثال ٤-٣.

هـ) مخطط السؤال ٤-٤-أ).

و) مخطط السؤال ٤-٤-ب).

ز) مخطط السؤال ٤-٤-ج).

٤-٧ ارسم المخطط البياني التام ثنائي الفرع

أ) $K_{2,3}$ ب) $K_{3,3}$

٤-٨ أوجد صيغة لعدد الأحرف في المخطط البياني التام ثنائي الفرع $K_{m,n}$.

٤-٩ في تعريف المخطط البياني ثنائي الفرع $G = (V, E)$ يَشترط بعض المؤلفين – خلافاً لما ذكرناه في التعريف – أن تكون المجموعتان الجزئيتان $V_1, V_2$ من المجموعة $V$ غير خاليتين (nonempty). بناءً على تعريف هؤلاء المؤلفين: أيُّ المخططات البيانية الموجودة في الأمثلة الثلاثة ٤-٨ ، ٤-٩ ، ٤-١٠ تعد مخططات ثنائية الفرع ؟

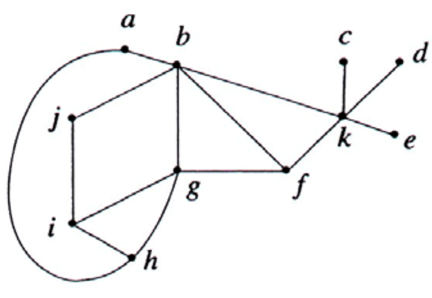
٤-١٠ في المخطط البياني الموزون المرسوم في مثال ٤-٥ أوجد مساراً ذا أقل طول ممكن (a path of minimum length) من $v$ إلى $w$ يمر بكل رأس مرة واحدة بالضبط ، حيث:

أ) $v = b, \quad w = e$

ب) $v = c, \quad w = d$

ج) $v = a, \quad w = b$

٤-١١ في المخطط البياني التالي: الرؤوس (vertices) تمثِّل مكاتب (offices). وأي حرف (edge) يصل بين مكتبين (connects two offices) إن كان هناك خط اتصال (communication link) بين المكتبين. ولاحظ أن أي مكتب يمكنه الاتصال (communicate with) بأي مكتب آخر إما مباشرة (directly) عن طريق خط اتصال بينهما أو عن طريق نقل الرسالة (relaying the message) عبر مكاتب أخرى.

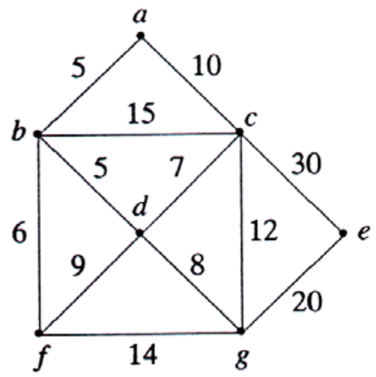


أ) اثبت بإعطاء مثال أنه حتى لو انقطعت بعض خطوط الاتصال (communication links) فإن الاتصال بين جميع المكاتب لا يزال ممكنا.

ب) ما هو أكبر عدد من خطوط الاتصال التي يمكن قطعها مع بقاء الاتصال بين جميع المكاتب ممكنا ؟

ج) ارسم مخططا يكون فيه أكبر عدد من خطوط الاتصال مقطوعا ، والاتصال بين جميع المكاتب ممكنا.

٤-١٢ في المخطط البياني التالي: الرؤوس تمثل مدنا (cities) ، والأعداد المكتوبة على الأحرف تمثل تكاليف (costs) بناء الطرق المقابلة لهذه الأحرف. أوجد نظام طرق ذا أقل تكاليف ممكنة (least-expensive road system) يصل (connects) جميع المدن.




٤-١٣ في مخطط الأسبقية / الأولوية البياني (precedence graph): الرؤوس (vertices) تمثل أنشطة / إجراءات / أفعالا معينة (certain actions) ، فمثلا قد تمثل الرأس عبارة تنفيذية (executable statement) في برنامج حاسوب (computer program). ويوجد حرف (edge) من الرأس v إلى الرأس w إذا كان الإجراء / الأمر التنفيذي / النشاط الذي تمثله v يجب تنفيذه / حدوثه قل الإجراء الذي تمثله w. ارسم مخطط أسبقية بيانيا (precedence graph) لكل قطعة برنامج حاسوب (computer program segment) من القطع التالية:

أ)

```
x := 1
y := 2
z := x+y
z := z+1
```

ب)

```
x := 1
y := 2
z := y+2
w := x+5
x := z+w
```

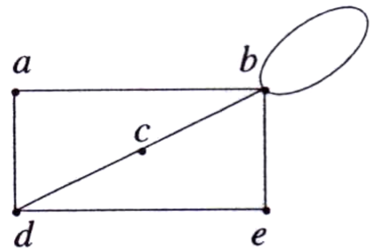
ج)

```
x := 1
y := 2
z := 3
a := x+y
b := y+z
c := x+z
c := c+1
x := a+b+c
```

## ثانيا: المسارات والدورات

**٤-١٤ اذكر ما إذا كان المسار المعطَى فيما يلي في المخطط البياني المبين بالشكل**

**i) مسارا بسيطا ii) دورة iii) دورة بسيطة**




أ) (b, b) ب) (e, d, c, b)

ج) (a, d, c, d, e) د) (d, c, b, e, d)

هـ) (b, c, d, a, b, e, d, c, b)　　و) (b, c, d, e, b, b)

ز) (a, d, c, b, e)　　ح) (d)

ط) (d, c, b)

**٤-١٥ ارسم مخططا بيانيا له الخواص (properties) التالية ، أو اشرح لماذا لا يوجد مثل هذا المخطط.**

أ) **6 رؤوس ، درجة كل منها 3.**

ب) **5 رؤوس ، درجة كل منها 3.**

ج) **4 رؤوس ، درجة كل منها 1.**

د) **6 رؤوس ، و 4 أحرف.**

هـ) **4 أحرف ، و4 رؤوس درجاتها 4 ,3 ,2 ,1.**

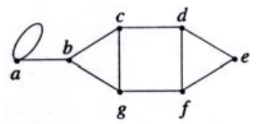
و) **4 رؤوس درجاتها 4 ,3 ,2 ,1.**

ز) **مخطط بياني بسيط فيه 6 رؤوس درجاتها 5 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1.**

ح) **مخطط بياني بسيط فيه 5 رؤوس درجاتها 4 ,4 ,3 ,3 ,2.**

ط) **مخطط بياني بسيط فيه 5 رؤوس درجاتها 4 ,4 ,4 ,2 ,2.**

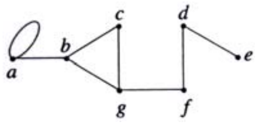
**٤-١٦ أ) أوجد جميع الدورات البسيطة (simple cycles) في المخطط البياني التالي.**




**ب) أوجد جميع المسارات البسيطة (simple paths) من a إلى e في المخطط البياني السابق (في أ)**

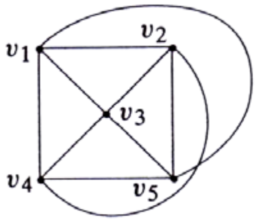
**٤-١٧ أوجد جميع المخططات البيانية الجزئية المتصلة (connected subgraphs) من المخطط البياني التالي التي تحتوي على جميع رؤوس المخطط البياني الأصلي وتحتوي في الوقت نفسه على أقل عدد ممكن**

مـن الأحـرف. أي هـذه المخططـات الجزئيـة تُعـد مسـارت بسـيطة ؟ وأيهـا دورات ؟ وأيها دورات بسيطة ؟

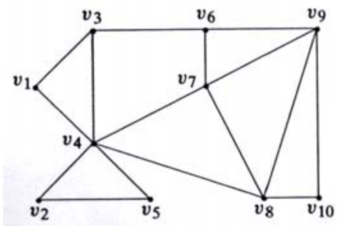



٤-١٨ أوجد درجة كل رأس من رؤوس المخطط البياني التالي:

أ)

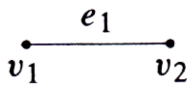



ب)

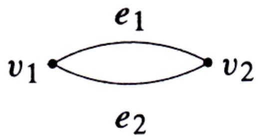



٤-١٩ أوجد جميع المخططات البيانية الجزئية التي يحتـوي أي منهـا علـى رأس واحدة على الأقل من المخطط البياني المعطَى فيما يلي:

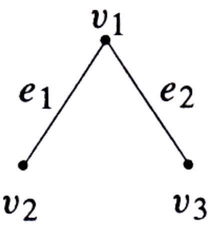
أ)



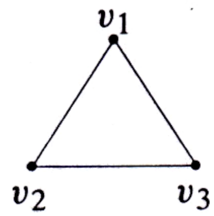

ب)




ج)



د)




٤-٢٠ في كلٍّ من المخططات البيانية التالية حَدِّد ما إذا كان المخطط يحتوي على دورة أويلر أم لا. وإن كان يحتوي فاعرض واحدة.

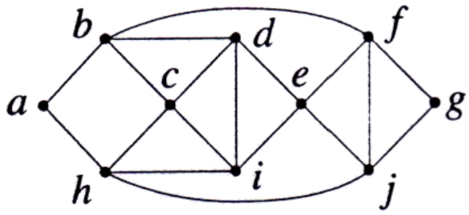
أ) المخطط البياني في السؤال ٤-١٧.

ب) المخطط البياني في السؤال ٤-١٨-أ.

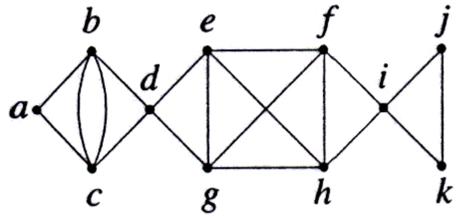
ج) المخطط البياني في السؤال ٤-١٨-ب.

د) المخطط البياني في السؤال ٤-١٥.

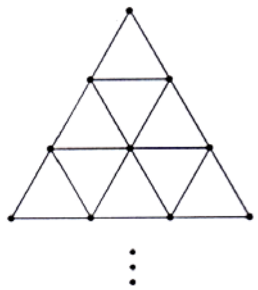
هـ)




و)



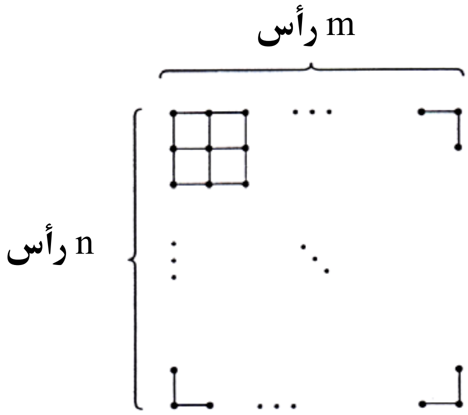

٤-٢١ المخطط البياني التالي مستمر إلى عمق اختياري محدود (arbitrary finite depth). هل يحتوي المخطط على دورة أويلر ؟ إن كانت الإجابة: نعم ، فحدِّد واحدة.



٤-٢٢  أ)  متى يحتوي المخطط البياني التام $K_n$ على دورة أويلر ؟

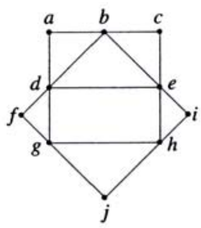
ب)  متى يحتوي المخطط البياني التام ثنائي الفرع $K_{m,n}$ على دورة أويلر ؟

ج)  لأي قيم للعددين m, n يحتوي المخطط البياني التالي على دورة أويلر ؟

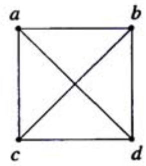



٤-٢٣  في كل من المخططين التاليين تحقق من وجود عدد زوجي من الرؤوس فردية الدرجة (of odd degree).

أ)



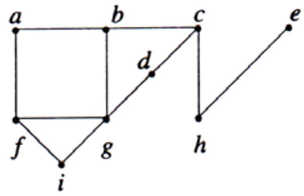
ب)




٤-٢٤ في المخطط البياني المعطَى في السؤال ٤-٢٣-أ) أوجد مسارا من d إلى e يحتوي على جميع الأحرف دون تكرار أي حرف.

٤-٢٥ أ) نفرض أن G مخطط بياني متصل (connected) فيه 4 رؤوس: $v_1, v_2, v_3, v_4$ فردية الدرجة. اثبت أنه توجد مسارات لا تحتوي على أي أحرف مكررة (repeated edges) من $v_1$ إلى $v_2$ ، ومن $v_3$ إلى $v_4$ بحيث أن أي حرف في G يقع في مسار واحد بالضبط من هذه المسارات.

ب) وضّح المطلوب في السؤال أ) باستخدام المخطط البياني التالي:




ج) اذكر وبرهن تعميما (generalization) للمطلوب في السؤال أ) حيث يوجد عدد اختياري من الرؤوس فردية الدرجة.

٤-٢٦ اذكر صحة أو خطأ (T/F) ما يلي. إن كان خاطئا فاعط مثالا مناقضا ، وإن كان صحيحا فوضّح لماذا.

أ) نفرض أن G مخطط بياني وأن v, w رأسان مختلفان (distinct). إذا كان هناك مسار من v إلى w ، فإن هناك مسارا بسيطا من v إلى w.

ب) إذا احتوى مخطط بياني على دورة تشمل (includes) جميع الأحرف ، فإن هذه الدورة هي دورة أويلر.

٤-٢٧ نفرض أن G مخطط بياني متصل. ونفرض أن e حرف في دورة. اثبت أن G يظل متصلا إذا حذفنا (removed) الحرف e.

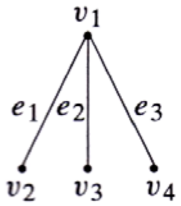
٤-٢٨ اعط مثالا لمخطط بياني متصل بحيث يصبح المخطط غير متصل إذا حذفنا أي حرف فيه. [افرض أن حذف أي حرف لا يؤدي إلى حذف أي رأس].

٤-٢٩ اثبت أنه إذا كان $G'$ مخططا بيانيا جزئيا متصلا (connected subgraph) من مخطط بياني G ، فإن $G'$ تحتويه إحدى المركبات (a component).

٤-٣٠ اثبت أنه إذا قمنا بتجزئة (partitioning) مخطط بياني G إلى مخططات بيانية جزئية متصلة (connected subgraphs) بحيث أن أي حرف في G وأي رأس في G ينتميان إلى واحد من المخططات الجزئية (subgraphs) ، فإن المخططات الجزئية تكون مركبات (components).

٤-٣١ نفرض أن G مخطط بياني موجّه (directed graph) ، وأن $G'$ هو المخطط البياني غير الموجّه (undirected graph) الذي نحصل عليه من G بإهمال / بتجاهل (ignoring) اتجاه الأحرف (direction of edges) في G. ونفرض أن G مخطط متصل. إذا كانت v رأسا في G ، فإننا نقول إن "نوعية" v (parity of) زوجية إذا كان عدد الأحرف التي صيغتها (v, w) زوجيا. وبصورة مماثلة نعرِّف النوعية الفردية. اثبت أنه إذا كان v, w رأسين في مخطط G ، ونوعية كل منهما فردية ، فإنه من الممكن تغيير اتجاه (changing the orientation) بعض الأحرف في G بحيث تصبح نوعية كل من v, w زوجية ، بينما لا تتغير نوعية أي رأس أخرى في G.

٤-٣٢ ارسم جميع المخططات البيانية الجزئية من المخطط البياني التالي التي يحتوي أي منها على حرفين بالضبط.




٤-٣٣ يقال لرأس v في مخطط بياني متصل G (connected) إنها "نقطة مَفْصِلِيَّة" (articulation point) إذا أَدَّى حَـذْف (removal) v وجميـع الأحـرف (edges) الواقعـة علـى v إلى فَصْـل / قَطْـع اتصـال (disconnecting) المخطط G.

أ) اعـط مثـالا لمخطـط بيـاني عـدد رؤوسـه 6 ، منهـا نقطتـان مفصـليتان بالضبط.

ب) اعط مثالا لمخطط بياني عدد رؤوسه 6 ، ليس منها أي نقطة مفصلية.

ج) اثبت أن أي رأس v في مخطط بياني متصل G تكون نقطة مفصلية إذا وفقط إذا كان هناك رأسان w, x في المخطط G يحققان الخاصية (property) أن أي مسار من w إلى x يمر بالرأس v.

٤-٣٤ نفرض أن G مخطط بياني موجَّه ، ونفرض أن v رأس في G. تُعرَّف درجة الـدخول علـى v (indegree of v) – ونرمـز لها بالاصـطلاح in(v) – بأنـها عـدد الأحـرف الـتي صيغـتها (w, v). وتُعـرَّف درجـة الخـروج مـن v (outdegree of v) – ونرز لها بالاصطلاح out(v) – بأنها عدد الأحرف الـتي صيغتها (v, w). وتعرَّف دورة أويلـر الموجَّهـة (directed Euler cycle) في G بأنها متتابعة من الأحرف صيغتها:

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2), \cdots, (v_{n-1}, v_n)$$

حيـث $v_0 = v_n$ ، وأي حـرف في G يظهـر مـرة واحـدة بالضـبط ، وكـذلك جميع الرؤوس تظهر.

**اثبت أن أي مخطط بياني موجَّه $G$ سيحتوي على دورة أويلر موجَّهة إذا وفقط إذا كان المخطط البياني غير الموجَّه (undirected graph) الذي نحصل عليه من $G$ بتجاهل اتجاهات أحرفه متصلا (connected) ، وكان**

$$in(v) = out(v)$$

**لكل رأس $v$ من رؤوس $G$.**

**٤-٣٥ تُعرَّف "متتابعة دي بروجن" (A de Bruijn sequence) للعدد الصحيح $n$ [أصفاراً وآحادا (in 0's and 1's)] بأنها متتابعة**

$$a_1, a_2, \cdots, a_{2^n}$$

**من $2^n$ رقم ثنائي (bits) تحقق الخاصية التالية:**

**إذا كانت $s$ سلسلة أرقام ثنائية (a bit string) طولها $n$ ، فيوجد عدد صحيح $m$ بحيث أن:**

$$s = a_m\ a_{m+1} \cdots a_{m+n-1} \qquad (*)$$

**وفي هذه العلاقة (*) نعرِّف**

$$a_{2^n+i} = a_i\ ; \qquad i = 1, 2, \cdots, 2^n - 1$$

أ) **اثبت أن 00011101 متتابعة دي بروجن لـ $n = 3$.**

ب) **نفرض أن $G$ مخطط بياني موجَّه رؤوسه تقابل (correspond to) جميع سلاسل الأرقام الثنائية التي طولها (all bit strings of length) $n-1$. ويوجد حرف موجَّه من الرأس $x_1 \cdots x_{n-1}$ إلى الرأس $x_2 \cdots x_n$ . اثبت أن دورة أويلر موجَّهة في $G$ تقابل متتابعة دي بروجن.**

ج) **اثبت أنه توجد متتابعة دي بروجن لكل عدد صحيح $n$ ، حيث** $n = 1, 2, \ldots$

**٤-٣٦ كم عدد المسارات التي طول أي منها $k \geq 1$ في المخطط البياني التام $K_n$ ؟**

٤-٣٧ اثبت أن عدد المسارات الموجودة في المخطط البياني التام $K_n$ حيث $n > 2$ ، والتي طول أي منها يقع بين $1, k$ احتوائيا (inclusive) يساوي:

$$\frac{n(n-1)[(n-1)^k-1]}{n-2}$$

٤-٣٨ نفرض أن $v, w$ رأسان مختلفان (distinct) في المخطط التام $K_n$. ونفرض أن $p_m$ ترمز إلى عدد المسارات التي طول أي منها يساوي $m$ من $v$ إلى $w$ في $K_n$ ، حيث $1 \le m \le n$.

أ) استنتج علاقة تكرارية / تراجعية / معاوَدة (recurrence relation) للعدد $p_m$.

ب) أوجد صيغة صريحة (explicit formula) للعدد $p_m$.

٤-٣٩ نفرض أن $v, w$ رأسان مختلفان في المخطط التام $K_n$ ، حيث $n \ge 2$. اثبت أن عدد المسارات البسيطة من $v$ إلى $w$ يساوي

$$(n-2)!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}$$

٤-٤٠ اثبت أن عدد المسارات البسيطة في المخطط التام $K_n$ يساوي $\lfloor n!\ e-1 \rfloor$ ، حيث $e = 2.71828...$ هو أساس اللوغاريتم الطبيعي.

٤-٤١ نفرض أن $G$ مخطط بياني ، وأن $R$ علاقة مُعَرَّفة على $V$ وهي مجموعة رؤوس المخطط $G$ كما يلي:

$vRw$ : إذا كان هناك مسار من $v$ إلى $w$.

اثبت أن $R$ علاقة تكافؤ على $V$.

٤-٤٢ اثبت أن أي مخطط بياني متصل فيه رأس واحدة أو رأسان درجة أي منهما عدد زوجي يحتوي على دورة أويلر.

٤-٤٣ نفرض أن G مخطط بياني متصل. المسافة (**distance**) بين رأسين v, w في المخطط G – ونرمز لها بالاصطلاح dist (v, w) – هي طول أقصر مسار من v إلى w. وقُطر (**diameter**) المخطط **G** يُعَرَّف بأنه

$$d(G) = \max \{dist(v, w) \mid v \text{ and } w \text{ are vertices in } G\}$$

أي هو أكبر مسافة بين أي رأسين في المخطط G.

أ) أوجد قطر المخطط البياني في مثال ٤-٢٠.

ب) أوجد قطر المخطط البياني التام على n رأس: $K_n$.

٤-٤٤ تُعرَّف الدورة في المخطط البياني الموجَّه البسيط [أي المخطط البياني الموجَّه الذي فيه على الأكثر حرف واحد صيغته (v, w) ، وليس فيه أي حرف صيغته (v, v)] بأنها متتابعة (sequence) من ثلاثة رؤوس أو أكثر

$$(v_0, v_1, \cdots, v_n)$$

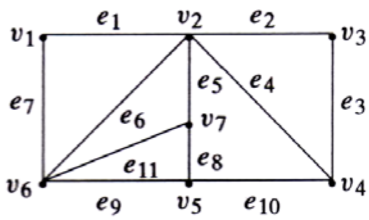
فيها $(v_{i-1}, v_i)$ حرف ، حيث i = 1, 2, ..., n و $(v_0 = v_n)$. والمخطط البياني الموجَّه اللادَوْرَوِي dag (directed acyclic graph) يُعَرَّف بأنه مخطط بياني موجَّه بسيط ليس فيه أي دورة.

اثبت أن أي مخطط بياني موجَّه لا دَوْرَوِي dag يحتوي على الأقل على رأس واحدة ليس لها أي أحرف خارجة منها (no out edges) [أي أن هناك على الأقل رأسا واحدة v بحيث أنه لا يوجد أي حرف صيغته (v, w)].

٤-٤٥ نفرض أن لدينا المخطط البياني التالي.

أ) اذكر ما إذا كان المسار $(v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_1, v_2)$ في المخطط مسارا بسيطا أو دورة أو دورة بسيطة ، أو ليس أيا منها.

ب) أوجد مخططا بيانيا جزئيا متصلا من المخطط المعطَى يحتوي على جميع رؤوس المخطط الأصلي ويحتوي في الوقت نفسه على أقل عدد ممكن من الأحرف.

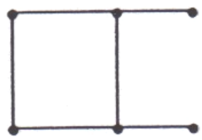



٤-٤٦ هل يحتوي المخطط البياني المعطى في السؤال السابق (٤-٤٥) على دورة أويلر ؟ وضِّح السبب في إجابتك.

## ثالثا: الأشجار

٤-٤٧ أي المخططات البيانية التالية تُعد أشجارا ؟ ولماذا ؟

أ)


ب)


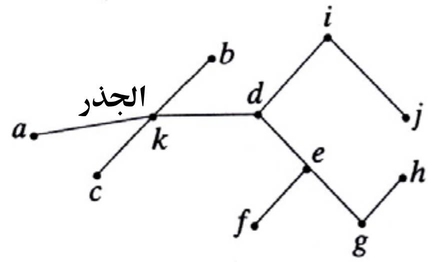
ج)


د)


٤-٤٨ أ) لأي قيم للعددين m, n يكون المخطط البياني التام ثنائي الفرع على m و n من الرؤوس شجرة ؟

ب) لأي قيم للعدد n يكون المخطط البياني التام على n رأس شجرة.

٤-٤٩ نفرض أن لدينا الشجرة التالية:



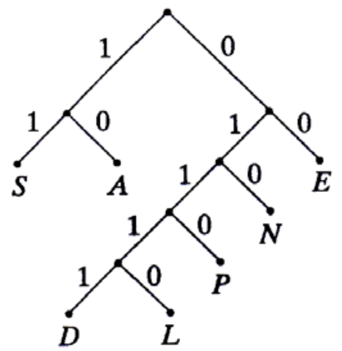

أ)  أوجد مستوى (level) كل رأس في الشجرة.

ب) أوجد ارتفاع الشجرة.

٤-٥٠  أ) ارسم الشجرة T المعطاة في مثال ٤-٢٣ كشجرة ذات جذر حيث جذرها هو الرأس a. كم ارتفاع الشجرة الناتجة ؟

ب) أعد حل السؤال أ) حيث الجذر هو الرأس b.

٤-٥١  أ) فك شفرة (decode) كل سلسلة أرقام ثنائية (bit string) من السلاسل التالية ، باستخدام شفرة هوفمان المعطاة فيما يلي:




| | | | |
|---|---|---|---|
| (i | 011000010 | (ii | 01110100110 |
| (iii | 01111001001110 | (iv | 1110011101001111 |

ب) صغ شفرة (encode) لكل كلمة من الكلمات التالية باستخدام شفرة هوفمان المعطاة في السؤال أ):

(i) DEN (أي عرين)    (ii) NEED

(iii) LEADEN (أي رصاصي)    (iv) PENNED

٤-٥٢ نفرض أن لدينا الجدول التالي لمجموعة من الحروف وتكراراتها:

| الحرف letter | التكرار frequency |
|---|---|
| $\propto$ | 5 |
| $\beta$ | 6 |
| $\gamma$ | 6 |
| $\delta$ | 11 |
| $\varepsilon$ | 20 |

أ) كوِّن شفرة هوفمان مُثْلَى لهذه المجموعة من الحروف.

ب) كـوِّن شـجرتيْ شـفرة هوفمـان مُثْلَـى لهـذا الجـدول ، بحيـث تكـون الشجرتان مختلفتي الارتفاع (height).

٤-٥٣ نفرض أن لدينا الجدول التالي لمجموعة من الحروف وتكراراتها:

| الحرف | التكرار |
|---|---|
| I | 7.5 |
| U | 20.0 |
| B | 2.5 |
| S | 27.5 |
| C | 5.0 |
| H | 10.0 |
| M | 2.5 |
| P | 25.0 |

أ) كوِّن شفرة هوفمان مُثْلَى لهذه المجموعة من الحروف.

ب) باسـتخدام الشـفرة الـتي حصـلت عليهـا في أ) أوجـد كلمـات الشـفرة (codewords) المقابلـة للكلمـات التاليـة [الـتي تتفـق تكراراتهـا مـع (consistent with) الجدول المعطى في أ)].

BUS, CUPS, MUSH, PUSS, SIP, PUSH,
CUSS, HIP, PUP, PUPS, HIPS

٤-٥٤ كوِّن شفرة هوفمان مُثْلَى لمجموعة الحروف المعطاة في الجدول التالي:

| الرمز | التكرار |
|---|---|
| a | 2 |
| b | 3 |

| | |
|---|---|
| 5 | c |
| 8 | d |
| 13 | e |
| 21 | f |

**٤-٥٥ نفرض أننا نحتاج لتخزين نص** (text) **مكوّن** (made up) **من الرموز** A, B, C, D, E **التي تحدث بالتكرارات التالية:**

| التكرار | الرمز |
|---|---|
| 6 | A |
| 2 | B |
| 3 | C |
| 2 | D |
| 8 | E |

**وقد اقترح أحد الطلاب استخدام الشفرات التالية متغيرة الأطوال** (variable-length codes)**:**

| الشفرة | الرمز |
|---|---|
| 1 | A |
| 00 | B |
| 01 | C |
| 10 | D |
| 0 | E |

**مُدَّعياً أنها تقوم بتخزين النص في حيِّز أقل** (less space) **من ذلك الذي تستخدمه شفرة هوفمان المُثْلَى. فهل هو مُحِقٌّ في ادعائه ؟ ولماذا ؟**

**٤-٥٦ أ) اثبت أن أي شجرة عدد رؤوسها 2 أو أكثر تحتوي على رأس درجتها 1** (degree).

**ب) اثبت أن أي شجرة هي مخطط بياني ثنائي الفرع** (bipartite).

**ج) اثبت أن رؤوس أي شجرة يمكن أن تُلَوَّن بلونين بحيث أن أي حرف يكون واقعا على** (incident on) **رأسين بلونين مختلفين.**

**٤-٥٧ يُعرَّف الاختلاف المركزي (eccentricity) لأي رأس v في شجرة T بأنه أكبر طول** (max. length) **لمسار بسيط** (simple path) **يبدأ عند v.**

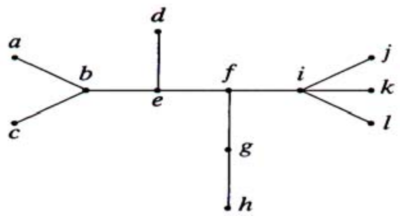
أ) أوجد الاختلاف المركزي لكل رأس في شجرة مثال ٤-٢٣.

ب) يقال لرأس v في شجرة T إنها مركز (center) للشجرة T إذا كان اختلاف v المركزي أقل ما يمكن (minimal). أوجد مركز / مراكز [center(s)] شجرة مثال ٤-٢٣.

ج) عَرِّف نصف قطر r (radius) شجرة T باستخدام مفهومَي (concepts) الاختلاف المركزي والمركز. وقد سبق تعريف قطر d (diameter) أي مخطط بياني في السؤال ٤-٤٣. هل صحيح (true) دائما – بناءً على تعريفكم لنصف القطر – أن $2r = d$ ؟ ولماذا ؟

٤-٥٨ اعط مثالا لشجرة T لا تحقق الخاصية (property) التالية: إذا كان v, w رأسين في T ، فإنه يوجد مسار وحيد (unique path) من v إلى w.

٤-٥٩ أ) ارسم الشجرة الحرة (free tree) التالية كشجرة ذات جذر (rooted tree) بحيث يكون جذرها c.




ب) أوجد مستوى (level) كل رأس في الشجرة التي حصلت عليها في أ).

ج) أوجد ارتفاع (height) الشجرة التي حصلت عليها في أ).

٤-٦٠ كوِّن شفرة هوفمان مُثْلَى لمجموعة الحروف المعطاة في الجدول التالي:

| التكرار | الحرف |
|---|---|
| 5 | A |
| 8 | B |
| 5 | C |
| 12 | D |
| 20 | E |
| 10 | F |

٤-٦١ **فيما يلي مجموعة من رسائل الجهاد واحتمالاتها (أي نِسَب تكراراتها) وكلمات الشفرة المقابلة لها والتي تستعمل في أرض المعركة.**

| الرسالة $x_i$ | الاحتمال $p_i$ | كلمة الشفرة في أرض المعركة $c_i$ |
|---|---|---|
| أطلِق النار | 0.34 | بسم الله |
| تقدم للأمام | 0.30 | الحمد لله |
| لا تتحرك ولا تطلق النار | 0.08 | حي على الفلاح |
| اصعد التل | 0.12 | الله أكبر |
| اهبط الوادي | 0.10 | سبحان الله |
| ارجع للخلف | 0.06 | لا إله إلا الله |

i) **من المتطلبات العامة عند صياغة الشفرات أن تُعطَى الرسالة الأكبر احتمالاً كلمة شفرة أقل طولاً ، أي أن يتحقق الشرط التالي:**

$$p_i \geq p_j \;\Rightarrow\; \ell_i \leq \ell_j \qquad \forall i, j$$

**حيث $\ell_i$ هو طول كلمة الشفرة $c_i$ .**

**بيِّن ما إذا كانت شفرة المعركة المعطاة تحقق هذا الشرط أم لا.**

ii) **المطلوب صياغة شفرة هوفمان مُثْلَى لمجموعة رسائل الجهاد السابقة.**

٤-٦٢ **تشتمل المعلومات والبيانات المخزونة في وسائل التخزين المساعد (auxiliary storage devices) أو المرسلة عبر خطوط الاتصال (communication lines) عادة على قدر كبير من الإطناب. فإذا أمكننا صياغة شفرة لهذه البيانات بحيث نقلل الإطناب فإننا نستطيع تقليل الحيز المطلوب للتخزين والوقت اللازم لإرسال البيانات. ومن أهم أسباب الإطناب في ملفات البيانات (data files) التوزيع الاحتمالي للرموز ، فمثلاً الحرف e هو أكثر الحروف الإنجليزية استخداماً. والحرف أ هو أكثر الحروف العربية استخداماً ، فمن الإطناب أن نمثل جميع الرموز بشفرة ثابتة الطول ، ولكن يمكننا تقليل مثل هذا النوع من الإطناب بصياغة شفرة**

متغيرة الطول (كشفرة هوفمان) لهذه الرموز ، بحيث نعطي الحروف الأكثر استخداماً عدداً أقل من الرموز الثنائية – أي كلمات شفرة أقصر – بينما تعطي الحروف الأقل احتمالا كلمات شفرة أطول.

الجدول التالي يعطي شفرتين مختلفتين لحروف اللغة العربية:

الأولى: الشفرة القياسية (ASCII) ثابتة الطول [وهي اختصار American Standard Code for Information Interchange) الشفرة القياسية الأمريكية لتبادل المعلومات] حيث طول أي كلمة فيها L = 8 bits.

الثانية: الشفرة المتراصة (هوفمان) متغيرة الطول ، حيث تتراوح أطوال كلماتها من 3 إلى 9 ، ومتوسط طول كلمة الشفرة فيها L = 4.4336.

المطلوب:

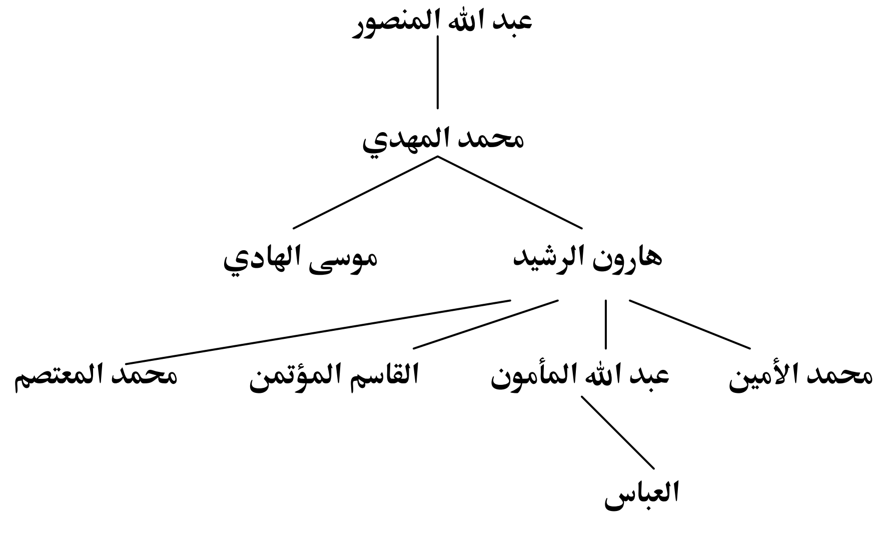
بَيِّن بمثال كيف أن الشفرة المتراصة تؤدي إلى ضغط (Compressing) أي ملف نصي عربي (Arabic text file) بنسبة كبيرة من حجمه الأصلي. فمثلاً:

(١) اكتب كلمة " الحياء " في كل من الشفرتين القياسية والمتراصة.

(٢) اذكر عدد الرموز الثنائية المطلوبة في كل من الشفرتين لتخزين كلمات الحديث التالي (الذي رواه مسلم) ، واحسب النسبة بين هذين العددين:

**الحياء خير كله**

٤-٦٣ نفرض أن لدينا الشجرة التالية:



| الرتبة RANK | الحرف LETTER | الاحتمال PROBABILITY | شفرة هوفمان HUFFMAN CODE | الطول LENGTH | الشفرة القياسية ASCII CODE |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ا | 0.13128 | 100 | 3 | 01101000 |
| 2 | ل | 0.10776 | 010 | 3 | 01100111 |
| 3 | م | 0.08728 | 000 | 3 | 01101100 |
| 4 | ن | 0.07249 | 1100 | 4 | 01101011 |
| 5 | ي | 0.06847 | 1010 | 4 | 01100100 |
| 6 | و | 0.06282 | 0111 | 4 | 00101100 |
| 7 | ه | 0.04217 | 11111 | 5 | 01101001 |
| 8 | ر | 0.04116 | 11110 | 5 | 01110110 |
| 9 | ب | 0.03998 | 11100 | 5 | 01100110 |
| 10 | ع | 0.03794 | 11011 | 5 | 01101011 |
| 11 | د | 0.03646 | 11010 | 5 | 01011101 |
| 12 | ت | 0.02620 | 01100 | 5 | 01101010 |
| 13 | ك | 0.02549 | 00111 | 5 | 00111011 |
| 14 | س | 0.02456 | 00110 | 5 | 01110011 |
| 15 | ف | 0.02382 | 00101 | 5 | 01110100 |
| 16 | ح | 0.01823 | 101111 | 6 | 01110000 |
| 17 | ق | 0.01794 | 101110 | 6 | 01110010 |
| 18 | أ | 0.01113 | 001001 | 6 | 01001000 |
| 19 | د | 0.01095 | 001000 | 6 | 01100000 |
| 20 | إ | 0.01095 | 110111 | 7 | 01111010 |
| 21 | ج | 0.01051 | 1110110 | 7 | 01011011 |
| 22 | ى | 0.01019 | 1110101 | 7 | 01101110 |
| 23 | ز | 0.00827 | 1011010 | 7 | 00101110 |
| 24 | ص | 0.00816 | 1011001 | 7 | 01110111 |
| 25 | ة | 0.00771 | 1011000 | 7 | 01101101 |
| 26 | ش | 0.00768 | 0110111 | 7 | 01100001 |
| 27 | خ | 0.00767 | 0110110 | 7 | 01101111 |
| 28 | ض | 0.00468 | 11101000 | 8 | 01110001 |
| 29 | ط | 0.00465 | 10110111 | 8 | 00100111 |
| 30 | ث | 0.00376 | 10110110 | 8 | 01100101 |
| 31 | ء | 0.00364 | 01101011 | 8 | 01111000 |
| 32 | غ | 0.00347 | 01101010 | 8 | 01111001 |
| 33 | ىء | 0.00283 | 01101001 | 8 | 01111010 |
| 34 | آ | 0.00275 | 01101000 | 8 | 01001110 |
| 35 | ؤ | 0.00265 | 111010011 | 9 | 01100011 |
| 36 | ظ | 0.00212 | 111010010 | 9 | 00101111 |

**الشفرة القياسية (ASCII) وشفرة هوفمان للحروف العربية**

(i) أوجد أ) والد (parent) هارون الرشيد.

ب) أجداد / سلف (ancestors) محمد المعتصم.

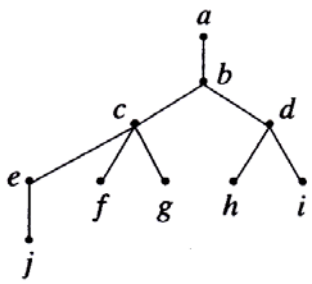
ج) أبناء (children) هارون الرشيد.

د) أحفاد / ذرية / سلالة (descendants) محمد المهدي.

هـ) إخوة (siblings) هارون الرشيد.

(ii) ارسم الشجرة الفرعية التي جذرها عبد الله المأمون (rooted at).

٤-٦٤ نفرض أن لدينا الشجرة التالية:




(i) أوجد أ) والد c ووالد h.

ب) سلف c وسلف j.

ج) أبناء d وأبناء e.

د) سلالة c وسلالة e.

هـ) إخوة f وإخوة h.

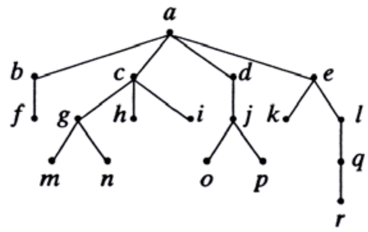
و) الرؤوس الطرفية.

ز) الرؤوس الداخلية.

(ii) ارسم أ) الشجرة الفرعية التي جذرها j.

ب) الشجرة الفرعية التي جذرها e.

٤-٦٥ أعد حل السؤال السابق ٤-٦٤) بالنسبة للشجرة التالية:




٤-٦٦ ارسم مخططا بيانيا يحقق الخاصية المذكورة فيما يلي ، وإن لم يوجد مثل هذا المخطط فوضّح لماذا.

أ) به 6 أحرف و8 رؤوس.

ب) لا دَوْرَوي ، وبه 4 أحرف و6 رؤوس.

ج) شجرة ، درجة أي رأس فيها تساوي 2.

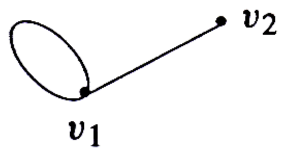
د) شجرة بها 6 رؤوس درجاتها: 3 ,3 ,1 ,1 ,1 ,1.

هـ) شجرة بها 4 رؤوس داخلية ، و6 رؤوس طرفية.

٤-٦٧ أ) وضِّح لماذا إذا سمحنا للدورة (cycle) أن يكون طولها صفراً 0 ، فإن مخططا بيانيا مكونا من رأس واحدة فقط (single vertex) وليس به أي حرف لا يُعَدُّ مخططا لا دَوْرَوِيا (not acyclic).

ب) وضِّح لماذا إذا سمحنا للدورة (cycle) أن تكرر أي حرف (repeat edges) ، فإن مخططا بيانيا مكونا من حرف واحد فقط (single edge) ورأسين لا يعد مخططا لا دَوْرَوِيا (not acyclic).

٤-٦٨ المخطط البياني المتصل المبين فيما يلي يحتوي على مسار بسيط وحيد (unique simple path) من أي رأس إلى أي رأس أخرى ، ولكنه ليس شجرة. وضِّح ذلك.




٤-٦٩ تُعَرَّف الغابة (forest) بأنها مخطط بياني بسيط ليس فيه أي دورة.

أ) وضّح لماذا تُعد الغابة اتحادا (union) لعدة أشجار.

ب) إذا كانت F غابة مكونة من m شجرة ، وعدد رؤوسها n ، فكم عدد أحرف F ؟

٤-٧٠ نفرض أن $P_1 = (v_0, \cdots, v_n),$

$$P_2 = (w_0, \cdots, w_m)$$

مساران بسيطان مختلفان (distinct simple paths) من a إلى b في مخطط بياني بسيط G.

هل بالضرورة (necessarily) يكون

$$(v_0, \cdots, v_n = w_m, w_{m-1}, \cdots, w_1, w_0)$$

دورة ؟ ولماذا ؟

٤-٧١ اثبت أن أي مخطط بياني G عدد رؤوسه n ، وعدد أحرفه أقل من n-1 لا يمكن أن يكون متصلا (connected).

٤-٧٢ ارسم الشجرة الحرة المبينة في السؤال ٤-٥٩-أ) كشجرة ذات جذر حيث جذرها الرأس f ، ثم أوجد:

أ) والد a. ب) أبناء b.

ج) الرؤوس الطرفية د) الشجرة الفرعية التي جذرها e.

٤-٧٣ اذكر مع التعليل صحة أو خطأ كل من العبارات التالية:

أ) إذا كانت T شجرة ذات 6 رؤوس ، فيجب أن تحتوي T على 5 أحرف.

ب) إذا كانت T شجرة ذات جذر تحتوي على 6 رؤوس ، فإن ارتفاع T يساوي 5 على الأكثر.

ج) المخطط البياني اللادَوْرَوي الذي يحتوي على 8 رؤوس يحتوي على 7 أحرف.

## رابعا: الأشجار المولِّدة

٤-٧٤ أوجد شجرة مولدة للمخطط البياني في مثال ٤ – ٣٠ بأتباع خوارزميةَ البحث بالعرض- أولا وبترتيب الرؤوس ( with the vertex ordering ) التالي:

أ) hgfedcba ب) hfdbgeca

ج) chbgadfe

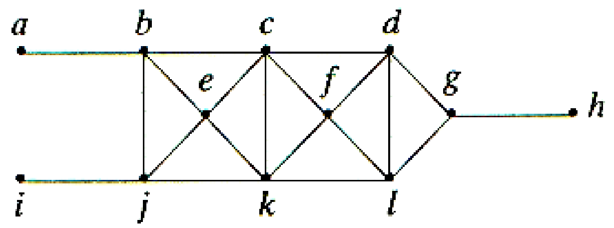
٤-٧٥ أوجد شجرة مولدة للمخطط البياني في مثال ٤-٣٠ باتباع خوارزمية البحث بالعمق -أولا وبترتيب ا لرؤوس التالي:

أ) hgfedcba ب) hfdbgeca

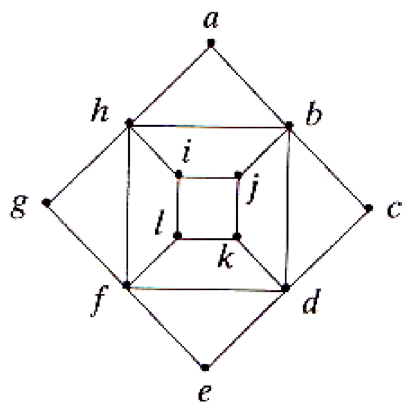
ج) dhcbefag

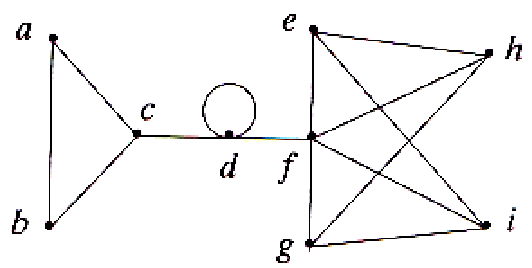
٤-٧٦ أوجد شجرة مولدة لكل من المخططات البيانية التالية:

أ)




ب)



ج) 


٤-٧٧ -أ) اعط مثالا يثبت أن خوارزمية البحث بالعرض – أولا يمكن أن تؤدى إلى الحصول على شجرتين مولدتين متطابقتين (identical) لمخطط بياني متصل G بترتيبين مختلفين لرؤوس المخطط G (from two distinct vertex orderings of G).

ب) أعد حل أ) بالنسبة الخوارزمية البحث بالعمق – أولا.

٤-٧٨ ما هي الشروط الواجب تحققها كي تحتوى أي شجرة مولدة لمخطط بياني متصل G على حرفٍ (edge) ما في G ؟

٤-٧٩ نفرض أن $T, T'$ شجرتان مولدتان لمخطط بياني متصل G. ونفرض أن x حرف (edge) في T وليس في $T'$. اثبت أنه يوجد حرف y في $T'$ وليس في T بحيث أن $(T-\{x\})\cup\{y\}$ و $(T'-\{y\})\cup\{x\}$ شجرتان مولدتان للمخطط G.

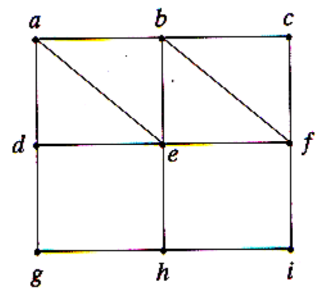
٤-٨٠ اكتب خوارزمية على أساس البحث بالعرض – أولا لإيجاد أقل طول (minimum length) لكل مسار من رأس محدودة v (fixed vertex) إلى جميع الرؤوس الأخرى في مخطط بياني غير موزون (unweighted graph).

٤-٨١ **نفرض أن T شجرة مولدة لمخطط بياني G. اثبت أنه إذا أضفنا إلى T حرفا** (edge) **في** G **(وليس في**T) **فإنه تنتج لدينا دورة وحيدة** (a unique cycle is produced.

٤-٨٢ **أ) أكتب خوارزمية البحث بالعرض – أولا لاختبار ما إذا كان مخطط بياني متصلا أم لا.**

**ب) اكتب خوارزمية البحث بالعمق – أولا لاختبار ما إذا كان مخطط بياني متصلا أم لا.**

٤-٨٣ **أوجد شجرة مولدة للمخطط البياني التالي**




**أ) باستخدام خوارزمية البحث بالعرض – أولا مع الترتيب التالي للرؤوس** ( verrtex ordering):

i) eachgbdfi     ii) fdehagbci

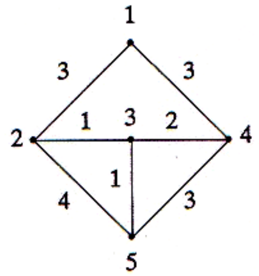
**ب) باستخدام خوارزمية البحث بالعمق – أولا مع الترتيب التالي للرؤوس:**

i) eachgbdfi     ii) fdehagbci

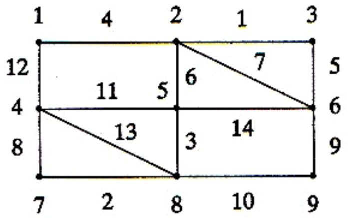
## خامسا : الأشجار المولِّدة الدنيا

٤-٨٤ **باستخدام خوارزمية بريم أوجد شجرة مولِّدة دنيا لكل من المخططات البيانية التالية:**

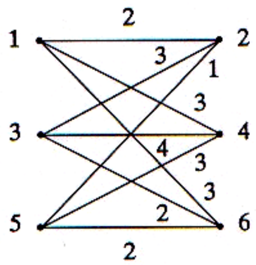
أ)


1
3 3
1 3 2
2 4
1
4 3
5

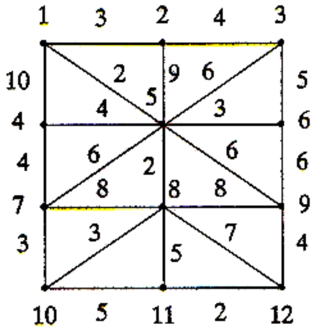
ب)


1 4 2 1 3
12 7 5
6
11 5
4 6
13 14
3
8 9
7 2 8 10 9

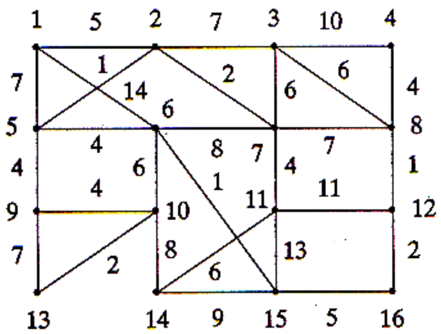
ج)


2
1 2
3
1
3
3 4
4
3
3
5 2 6
2

د)


1 3 2 4 3
10 2 9 6 5
5
4 4 3 6
4 6 6 6
2
7 8 8 8 9
3 3 7 4
5
10 5 11 2 12

هـ)


1 5 2 7 3 10 4
1 2 6
7 14 6 4
6
5 6 8
4 8 7 7
4 6 4 1
4 1 11
9 10 11 12
7 8 13 2
2 6
13 14 9 15 5 16

٤–٨٥ نفرض أن G مخطط بياني متصل وموزون ، ونفرض أن v رأس في G ، وأن e حرف ذو أقل وزن (of minimum weight) يقابل الرأس v. اثبت أن هناك شجرة مولدة دنيا تحتوي على الحرف e.

٤–٨٦ نفرض أن G مخطط بياني متصل وموزون وأن v رأس في G. ونفرض أن أوزان الأحرف التي تقابل الرأس v متباينة (distinct). ونفرض أن e هو الحرف (edge) ذو أقل وزن الذي يقابل الرأس v. هل يجب أن تحتوي أي شجرة مولدة دنيا على الحرف e ؟

٤–٨٧ اثبت أن أي خوارزمية لإيجاد شجرة مولدة دنيا في مخطط $K_n$ جميع أوزانه متساوية يجب أن تختبر (examine) / تزور جميع أحرفه.

٤–٨٨ اثبت أنه إذا كانت جميع الأوزان في مخطط بياني متصل G متباينة (distinct) ، فإن G له شجرة مولدة دنيا وحيدة (unique).

٤–٨٩ اذكر صحة أو خطأ (T/F) كل من العبارات التالية. إن كانت العبارة صحيحة فبرهنها ، وإن كانت خاطئة فاعط مثالا مناقضا. وفي كل عبارة افرض أن G مخطط بياني متصل وموزون.

أ) إذا كانت جميع الأوزان في G متباينة ، فإن الأشجار المختلفة المولدة للمخطط G تكون أوزانها متباينة.

ب) إذا كان e حرفا في G وزنه أقل من وزن أي حرف آخر ، فإن e يكون موجوداً في أي شجرة مولدة دنيا للمخطط G.

ج) إذا كانت T شجرة مولدة دنيا للمخطط G ، فإن هناك ترقيما (labeling) لرؤوس G بحيث أن خوارزمية بريم تؤدي إلى الحصول على الشجرة T.

٤–٩٠ نفرض أن G مخطط بياني متصل وموزون. اثبت أنه إذا واصلنا حذف حرف (edge) من G وزنه أكبر ما يمكن (of max. weight) ، بحيث أن

**حذفه** (removal) **لا يقطع (اتصال)** G (does not disconnect) ، **طالما أن عملية الحذف هذه ممكنة ، فإننا نحصل في النهاية على شجرة مولدة دنيا للمخطط** G.

**٤-٩١ اكتب خوارزمية لإيجاد شجرة مولدة كبرى / قصوى** (maximal spanning tree) **في مخطط بياني متصل موزون. [إرشاد: ما هي التعديلات التي تجريها على خوارزمية بريم للحصول على الشجرة المطلوبة ؟].**

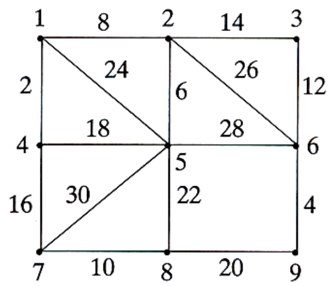
**٤-٩٢ خوارزمية كرَسْكال** (Kruskal's algorithm) **لإيجاد شجرة مولدة دنيا في مخطط بياني متصل موزون** G **عدد رؤوسه** n **تتكون من الخطوات التالية:**

- **المخطط البياني** T **يتكون ابتداءً من رؤوس** G **، وليس فيه أي حرف** (edge).
- **في كل تكرير** (iteration) **نضيف إلى** T **حرفا** e **ذا أقل وزن بحيث لا يُكمل دورة في** T.
- **عندما يحتوي المخطط**T **على** n-1 **حرف نتوقف.**

**أ) اكتب إجراء خوارزمية كرَسْكال.**

**ب) طبق خوارزمية كرسكال لإيجاد شجرات مولدة دنيا للمخططات البيانية في السؤال ٤-٨٤.**

**٤-٩٣ نفرض أن لدينا المخطط البياني** G **التالي:**



أ) أوجد شجرة مولدة دنيا للمخطط G.

ب) بأي ترتيب تضاف الأحرف في خوارزمية بريم بالنسبة للمخطط G إذا كانت الرأس الابتدائية (initial vertex) هي 1 ؟

ج) أعد حل ب) إذا كانت الرأس الابتدائية هي 6.

## سادسا: الأشجار الثنائية

**٤-٩٤** ضع الكلمات التالية – بالترتيب الذي تظهر به – في شجرة بحث ثنائية:
SAY I BELIEVE IN ALLAH AND THEREAFTER BE UPRIGHT

**٤-٩٥** اكتب خوارزمية رسمية / شكلية (formal algorithm) للبحث في شجرة بحث ثنائية.

**٤-٩٦** اكتب خوارزمية تقوم بتخزين كلمات مختلفة (distinct words) عددها n في شجرة بحث ثنائية T ارتفاعها أقل ما يمكن (of minimal height).

**٤-٩٧** هل العبارة التالية صحيحة أم خاطئة (T/F) ؟ ولماذا ؟

إذا تحقق الشرط التالي في شجرة ثنائية T ، فإن T تكون شجرة بحث ثنائية: " لأي رأس v في الشجرة T : عنصر البيانات (data item) في v أكبر من عنصر البيانات في الابن الأيسر للرأس v ، وعنصر البيانات في v أصغر من عنصر البيانات في الابن الأيمن للرأس v ".

**٤-٩٨** في كل مما يلي ارسم مخططا بيانيا تتحقق فيه الخواص المذكورة أو وضِّح لماذا لا يوجد مثل هذا المخطط:

أ) شجرة ثنائية تامة (full binary tree) لها 4 رؤوس داخلية (internal vertices) و 5 رؤوس طرفية (terminal vertices).

ب) شجرة ثنائية تامة ارتفاعها height = 3 ، ولها 9 رؤوس طرفية.

ج) شجرة ثنائية تامة ارتفاعها height = 4 ، ولها 9 رؤوس طرفية.

**٤-٩٩ تُعرَّف الشجرة المِيمية التامة (full m-ary tree) بأنها شجرة ذات جذر لكل والد (parent) فيها أبناء مرتَّبون (ordered children) عددهم m.**

**نفرض أن T شجرة ميمية تامة عدد رؤوسها الداخلية i.**

**أ) كم عدد رؤوس الشجرة T ؟**

**ب) كم عدد رؤوس T الطرفية ؟**

**برهن إجابتكم.**

**٤-١٠٠ اكتب خوارزمية لإنشاء (constructing) شجرة ثنائية تامة عدد رؤوسها الطرفية n ، حيث $n > 1$.**

**٤-١٠١ اكتب خوارزمية ارتدادية (recursive algorithm) لإدخال (inserting) كلمة في شجرة بحث ثنائية.**

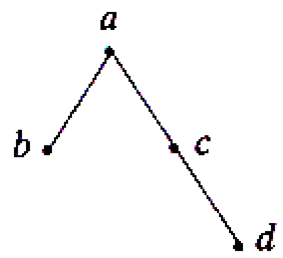
**٤-١٠٢ أوجد أقصى ارتفاع (maximum height) لشجرة ثنائية تامة عدد رؤوسها الطرفية t.**

**٤-١٠٣ اكتب خوارزمية لاختبار ما إذا كانت شجرة ثنائية مخزون في رؤوسها البيانات هي شجرة بحث ثنائية أم لا.**

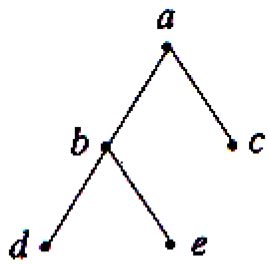
**٤-١٠٤ يُقال لشجرة ثنائية T إنها متوازنة (balanced) إذا تحقق الشرط التالي: "لأي رأس v في الشجرة T : الفارق بين ارتفاعي الشجرة الفرعية اليسرى والشجرة الفرعية اليمنى للرأس v يساوي 1 على الأكثر." [ملاحظة: ارتفاع الشجرة الخاوية (empty tree) يُعرَّف بأنه 1-].**

**اذكر ما إذا كانت كل شجرة من الأشجار التالية متوازنة أم لا.**

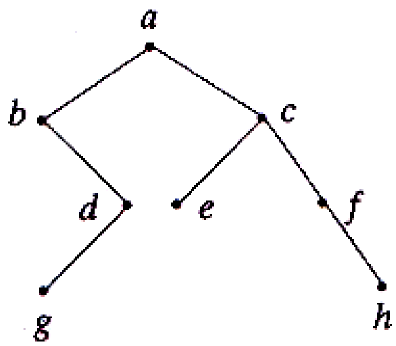
أ)



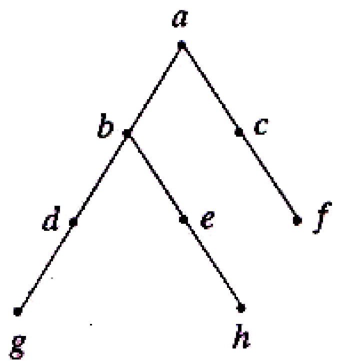

ب)




ج)




د)




**٤-١٠٥ نفرض أن** $N_h$ **تعرَّف بأنها أقل عدد من الرؤوس** (minimum number of vertices) **في شجرة ثنائية متوازنة [انظر تعريفها في السؤال السابق ٤-١٠٤] ارتفاعها** h.

أ) اثبت أن $N_0 = 1, \quad N_1 = 2, \quad N_2 = 4$

ب) اثبت أن $N_h = 1 + N_{h-1} + N_{h-2}\ ; \quad h \geq 0$

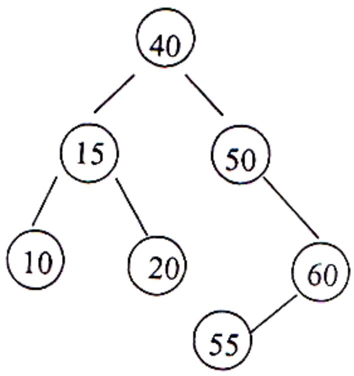
**٤-١٠٦ إذا كان عدد الرؤوس الداخلية في شجرة ثنائية تامة يساوي 15 ، فكم عدد رؤوسها الطرفية ؟**

**٤-١٠٧ -أ) ضع الكلمات التالية - بالترتيب الذي تظهر به - في شجرة بحث ثنائية:**

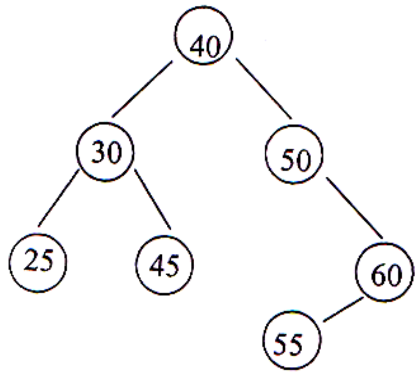
JIHAD IS THE ONLY WAY FOR LIBERATING
OUR OCCUPIED LANDS

**ب) اشرح كيف نبحث عن كلمة MARTYRDOM في شجرة البحث الثنائية في أ).**

**٤-١٠٨ بالنسبة لكل من الشجرتين الثنائيتين التاليتين: هل الشجرة شجرة بحث ثنائية (BST) أم لا ؟**




(ب)



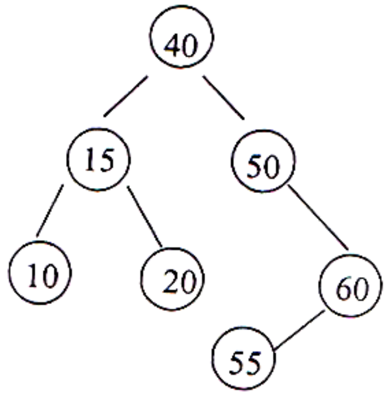

(أ)

**٤-١٠٩ ارسم أشجار البحث الثنائية التي تنشأ من قوائم المفاتيح (lists of keys) التالية . ثم قارن بين كفاءة البحث في كل من هذه الأشجار، وبيِّن أيها أعلى كفاءة.**

أ) 25, 45, 15, 10, 60, 55, 12

ب) 25, 12, 55, 10, 15, 45, 60
ج) 25, 12, 10, 15, 55, 60, 45
د) 10, 12, 15, 25, 45, 55, 60

**٤-١١٠ نفرض أن لدينا الشجرة الثنائية التالية**




**كم عدد المقارنات(comparisons ) المطلوبة لتحديد ما إذا كان كل من العناصر / المفاتيح (keys) التالية موجودا ( وبالتالي يتم العثور عليه أو غير موجود في الشجرة ؟ اكتب جميع العناصر / المفاتيح التي نقارنها بالهدف (target) في كل عملية بحث.**

(أ) 50 (ب) 55 (ج) 10

(د) 65 (هـ) 52 (و) 48

**٤-١١١ -أ) نفرض أن عناصر شجرة بحث ثنائية قد أدخلت (inserted) بالترتيب (in order). ما هو شكل الشجرة الناتجة ؟ وما هي رتبة البحث في هذه الشجرة ؟**

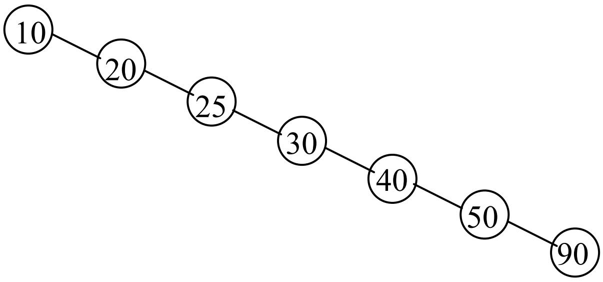
**ب) نفرض أن الشجرة الفرعية اليسرى ( left subtree) لكل رأس في الشجرة التالية هي شجرة خاوية.**

**i) هل الشجرة شجرة بحث ثنائية (bst) ؟**

**ii) ما نتيجة عرض مفاتيحها / محتوياتها بالاجتياز الترتيبي؟**

iii) **اكتب متتابعة**(sequence) **لإدخال هذه المفاتيح بحيث تنشئ شجرة بحث ثنائية أشجارها الفرعية الخاوية تقع جميعها في أدني / أخفض مستوى** ( lowest level) .

iv) **هل هناك أكثر من متتابعة واحدة تحقق الشرط السابق في** (iii) ؟




**٤-١١٢ في شجرة البحث الثنائية ما هي العلاقة** ( relationship) **بين:**

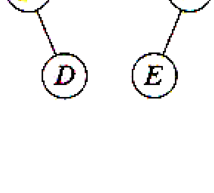
- **الابن الأيسر** (left child) **والابن الأيمن** (right child ).
- **الابن الأيسر والوالد** (parent).
- **الابن الأيمن والوالد.**
- **الوالد والذرية** (descendants) **في شجرته الفرعية اليسرى.**

## سابعا: الاجتياز الشامل للأشجار

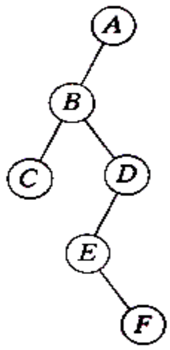
**٤-١١٣ في كل من الأشجار التالية اذكر الترتيب الذي يتم به تشغيل الرؤوس عند اتباع الاجتياز**

i) **سابق الترتيب** ii) **الترتيبي** iii) **لاحق الترتيب**

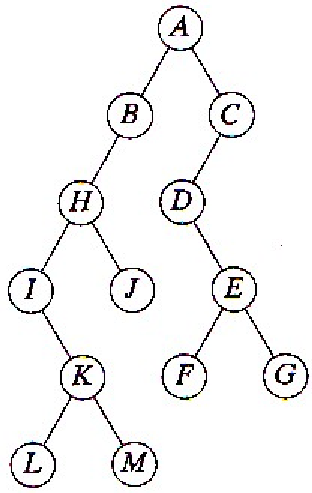
(أ)



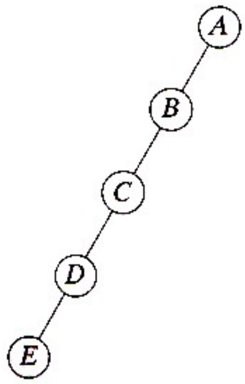
(ب)



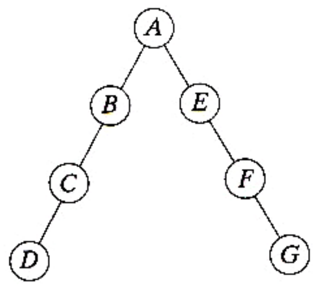

(ج)




(د)



(هـ)




**٤-١١٤ لكل تعبير من التعابير التالية المكتوبة بالصيغة الوسطية** (infix form) **المعتادة: مَثِّل التعبير كشجرة ثنائية ، واكتب كلا من:** i) **الصيغة البادئة / المقدَّمة / السابقة** (prefix form) ii) **الصيغة المؤخَّرة / اللاحقة** (postfix form):

(أ) (A+B) * (C – D)

(ب) ((A-C)*D) / (A+(B+D))

(ج) (A*B+C*D)-(A/B-(D+E))

(د) (((A+B)*C+D)*E)-((A+B)*C-D)

(هـ) (A*B-C/D+E)+(A-B-C-D*D)/(A+B+C)

**٤-١١٥ لكل تعبير من التعابير التالية المكتوبة بالصيغة اللاحقة : مَثِّل التعبير كشجرة ثنائية ، و اكتب كلا من** i) **الصيغة البادئة / السابقة** ii) **الصيغة الوسطية** (infix) **المعتادة** iii) **صيغة التعبير تامة الأقواس** (fully parenthesized form):

(أ) AB+C-　　(ب) ABC+-

(ج) ABCD+*/E-　　(د) ABC**CDE+/-

(هـ) AB+CD*EF/--A*

**٤-١١٦ أوجد قيمة كل من التعابير التالية المكتوبة بالصيغة اللاحقة** (postfix) **بفرض أن** A = 1, B = 2, C = 3, D = 4:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (أ) | ABC+- | (ب) | AB+C- |
| (ج) | AB+CD*AA/--B* | (د) | ABC**ABC++- |
| (هـ) | ABAB*+*D* | (و) | ADBCD*-+* |

**٤-١١٧ اعط مثالا يُبَيِّن أنه يمكن لأشجار ثنائية مختلفة (distinct) رؤوسها A , B, C أن تؤدى إلي الحصول على قائمة الاجتياز سابق الترتيب A B C نفسها (same preorder listing ).**

**٤-١١٨ اثبت أنه توجد شجرة ثنائية وحيدة ذات 6 رؤوس نتيجة اجتيازها سابق الترتيب هي : ABCEFD ، ونتيجة اجتيازها الترتيبي هي: ACFEBD.**

**٤-١١٩ اكتب خوارزمية تعيد بناء (reconstructs) شجرة ثنائية أُعطِينا نتيجة اجتيازها سابق الترتيب ونتيجة اجتيازها الترتيبي.**

**٤-١٢٠ اعط مثالا لشجرتين ثنائيتين مختلفتين (distinct ) $B_1, B_2$ تحتوى كل منهما على رأسين ، بحيث تكون نتيجة الاجتياز سابق الترتيب للشجرة $B_1$ هي نفسها نتيجة الاجتياز سابق الترتيب للشجرة $B_2$ ، وكذلك نتيجة الاجتياز لاحق الترتيب للشجرة $B_1$ هي نفسها نتيجة الاجتياز لاحق الترتيب للشجرة $B_2$ .**

**٤-١٢١ نفرض أن $P_1, P_2$ تبديلان (2 permutations) للقائمة ABCDEF. هل توجد شجرة ثنائية رؤوسها A, B, C, D, E, F نتيجة اجتيازها سابق الترتيب هي $P_1$ ، ونتيجة اجتيازها الترتيبي هي $P_2$ ؟ ولماذا ؟**

**٤-١٢٢ اكتب خوارزمية ارتدادية لطباعة محتويات (contents) الرؤوس الطرفية في شجرة ثنائية من اليسار إلي اليمين.**

٤-١٢٣ اكتــب خوارزميــة ارتداديــة لتبــديل (interchanging) جميــع الأبنــاء اليساريين و اليمينيين (all left and right children) في شجرة ثنائية .

٤-١٢٤ اكتب خوارزمية ارتدادية تعطى قيما ابتدائية (initializes) لجميع رؤوس شجرة ثنائية ، حيث القيمة الابتدائية عند أي رأس هي عدد عناصر ذريتها / سلالتها (number of its descendants).

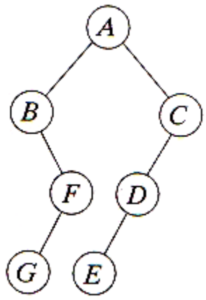
٤-١٢٥ نفرض أن أي تعبير لدينا يحتوي فقط علي المعامَلات A, B, ..., Z (operands) ، والمؤثرات / , * , − , + (operators).

أ) اذكر شرطا ضروريا و كافيا (necessary and sufficient condition) كي تكون أي سلسلة من الرموز (string of symbols) تعبيرا صحيحا بالصيغة اللاحقة (valid postfix expression).

ب) نفرض أننا قد أُعطينا الشجرة الثنائية التي تمثِّل تعبيرا ما. اكتب خوارزمية تقوم بطباعة صيغة التعبير الوسطية تامة الأقواس (fully parenthesized infix form of the expression).

٤-١٢٦ نفرض أننا قد أُعطينا شجرة شفرة هو فمان ( انظر مثال ٤-٢٧). ونفرض أنه قد تم تخزين رمز (a character) وتكراره (its frequency) في كل رأس طرفية (terminal vertex). اكتب خوارزمية لطباعة الرموز و شفراتها (codes).

٤-١٢٧ نفرض أن لدينا الشجرة الثنائية التالية:




أ) ما نتيجة الاجتياز سابق الترتيب لرؤوس الشجرة ؟

ب) ما نتيجة الاجتياز الترتيبي لرؤوس الشجرة؟

ج) ما نتيجة الاجتياز لاحق الترتيب لرؤوس الشجرة ؟

**٤-١٢٨ نفرض أن لدينا التعبير التالي في الصيغة البادئة / السابقة (prefix):**

–* E / BD – CA

أ) مَثِّل التعبير بشجرة ثنائية.

ب) اكتب كلا من الصيغة اللاحقة و الصيغة الوسطية تامة الأقواس لهذا التعبير.

**٤-١٢٩ – أ) ما نتيجة الاجتياز الترتيبي للشجرة الثنائية في السؤال ٤-١٠٨-أ) ؟**

ب) ما نتيجة الاجتياز الترتيبي للشجرة الثنائية في السؤال ٤-١٠٨-ب) ؟

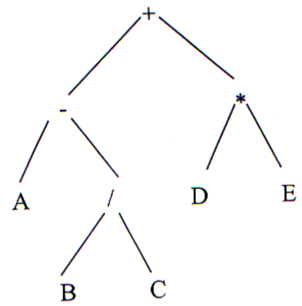
ج) ما نتيجة الاجتياز الترتيبي للشجرة الثنائية في السؤال ٤-١١١-ب) ؟

**٤-١٣٠ نفرض أن لدينا شجرة بحث ثنائية نتيجة اجتيازها الترتيبي هي:**

1, 2, 3, 4, 5, 6. وأن عقدة الجذر (root node) تحتوي على 3، وأن عقدة جذر شجرتها الفرعية اليمنى تحتوي على 5. ماذا تعرف عن الترتيب (order) الذي أُدخلت به الأعداد في هذه الشجرة؟

## تمارين عامة على الأشجار الثنائية و اجتيازها

٤-١٣١ ما هي نتيجة تطبيق الاجتياز الترتيبي والاجتياز سابق الترتيب وكذلك الاجتياز لاحق الترتيب على شجرة التعبير الآتية ؟



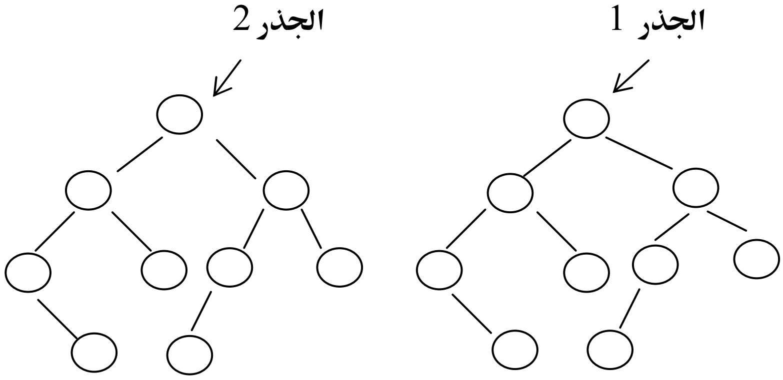

٤-١٣٢ اكتب دالة صحيحة لإيجاد عدد الأوراق (leaves) في شجرة ثنائية.

٤-١٣٣ اكتب دالة لإيجاد عدد مرات ظهور (frequency) رمز معين وليكنx في شجرة ثنائية من الرموز.

٤-١٣٤ اكتب خوارزمية لطباعة الرموز الموجودة في أوراق شجرة ثنائية من الرموز.

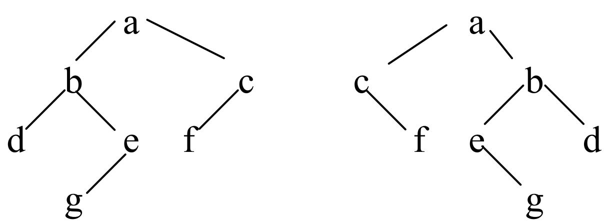
٤-١٣٥ اكتب دالة منطقية تحدد ما إذا كانت شجرتان ثنائيتان من الرموز متطابقتين (identical) أم لا.

٤-١٣٦ يقال لشجرتين ثنائيتين إنهما متشابهتان (similar) إذا كان لهما الشكل نفسه بغض النظر عن البيانات الموجودة فيهما. فمثلا الشجرتان المرسومتان فيما يلي متشابهتان.




**المطلوب كتابة دالة منطقية تحدد ما إذا كانت شجرتان معطاتان متشابهتين أم لا.**

**٤-١٣٧ يقال لشجرة ثنائية إنها انعكاس (صورة مرآة mirror image) لشجرة أخرى إذا كانت إحدى الشجرتين تمثل صورة في مرآة للشجرة الأخرى. فمثلا الشجرتان المرسومتان أدناه تمثل إحداهما انعكاسا للأخرى.**




**المطلوب كتابة دالة منطقية تحدد ما إذا كانت شجرة من الرموز انعكاسا لشجرة أخرى أم لا.**

**٤-١٣٨ اكتب خوارزمية لعمل نسخة (copy) (طبق الأصل) من شجرة ثنائية من الأعداد.**

٤-١٣٩ من المعلوم أنه بمعرفة نتيجتي الاجتياز الترتيبي والاجتياز سابق الترتيب يمكننا إنشاء الشجرة الثنائية الوحيدة المقابلة. المطلوب رسم الشجرة الثنائية إذا علمنا أن :

نتيجة الاجتياز الترتيبي هي :

3 8 4 9 6 5 7

ونتيجة الاجتياز سابق الترتيب هي :

9 8 3 4 7 6 5

٤-١٤٠ أ) ارسم شجرة البحث الثنائية الناتجة من إضافة العناصر التالية بالترتيب المذكور إلى شجرة خالية :

20 45 5 40 25 15 60 55 10 30 50 35

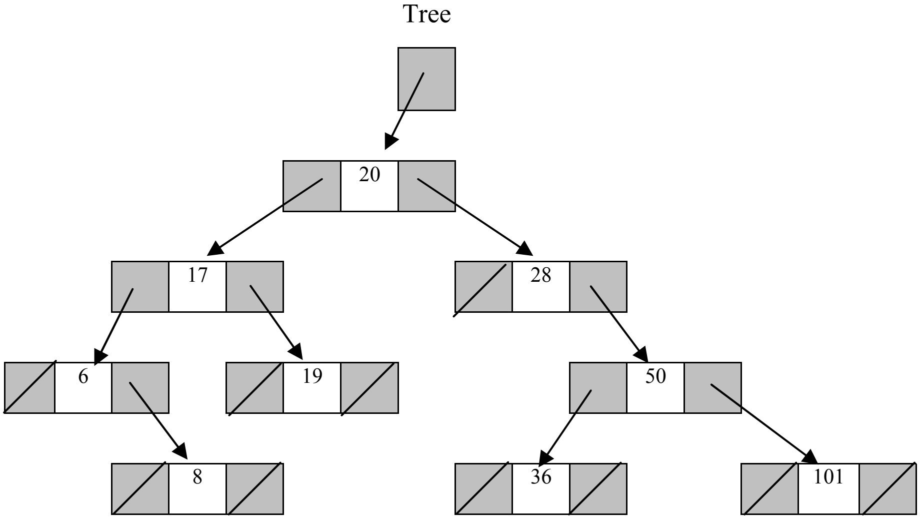
ب) أعد حل السؤال السابق باستخدام الأعداد :

5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60

٤-١٤١ اكتب برنامجا لقراءة ملف من الملفات النصية (text file) وإيجاد تكرار (frequency) كل حرف من حروف الملف ، وذلك عن طريق بناء شجرة بحث ثنائية يحتوى كل عنصر من عناصرها على حرف وتكرار هذا الحرف. عند الانتهاء من قراءة الملف وبناء الشجرة يقوم البرنامج بطباعة الشجرة – أي بطباعة كل حرف وتكراره – بحيث تظهر الحروف طبقا للترتيب الأبجدي.

٤-١٤٢ من الممكن ترتيب مجموعة من العناصر (ولتكن مجموعة من الأعداد) ترتيبا تصاعديا وذلك عن طريق بناء شجرة بحث ثنائي تحتوى على هذه العناصر ، ثم طباعة عناصر الشجرة باستخدام الاجتياز الترتيبي. المطلوب كتابة برنامج لتنفيذ هذه الطريقة وذلك بفرض عدم وجود تكرار في العناصر المطلوب ترتيبها. وتسمى هذه الطريقة : الترتيب باستخدام الأشجار (tree sort).

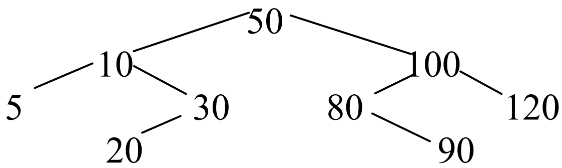
٤-١٤٣ ما نتيجة كل من الاجتياز الترتيبي، والاجتياز سابق الترتيب، والاجتياز لاحق الترتيب للشجرة التالية:




٤-١٤٤ (i) أعد رسم شجرة البحث الثنائية (BST) التالية بعد إدخال الأعداد الصحيحة

60 150 140 55 145 70

بالترتيب من اليسار إلى اليمين – في الشجرة.




(ii) طبق طريقة الاجتياز لاحق الترتيب (postorder traversal) على الشجرة الناتجة في (i).

٤-١٤٥ اكتب دالة ارتدادية لحساب عدد أوراق شجرة ثنائية باتباع الخوارزمية الارتدادية التالية:

- إذا كانت الشجرة خالية فإن عدد الأوراق = صفر

- **وما عدا ذلك:**
  - **إذا كانت الشجرة الفرعية اليمنى خالية ، والشجرة الفرعية اليسرى خالية، فإن عدد الأوراق = ١**
  - **وما عدا ذلك فإن عدد الأوراق = عدد أوراق الشجرة الفرعية اليمنى + عدد أوراق الشجرة الفرعية اليسرى.**

**٤-١٤٦ نفرض أن** f **ملف نصوص يحتوي على أسماء بعض الفواكه، بحيث أن اسم أي فاكهة** fruit **مسجل على سطر مستقل.**

**أ) اكتب برنامجاً لقراءة أسماء الفواكه من الملف اسما اسما، وتخزينها على التوالي في رؤوس شجرة بحث ثنائية** root **، أي يتم إنشاء الشجرة بتكرار إضافة عناصر إليها مبتدئين بشجرة خالية.**

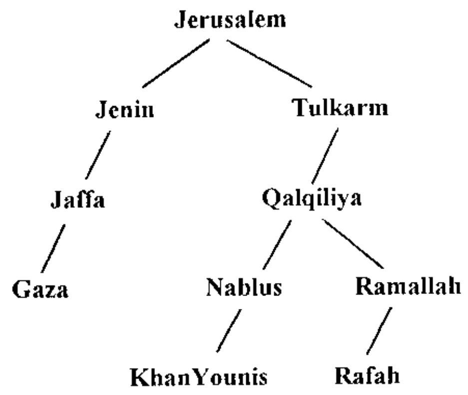
**ب) ارسم شجرة البحث الثنائية الناتجة إذا اشتمل ملف النصوص على أسماء الفواكه التالية:**

| | |
|---|---|
| **ليمون** | lemon |
| **موز** | banana |
| **برتقال** | orange |
| **تفاح** | apple |
| **تين** | fig |
| **بطيخ** | melon |
| **سفرجل** | quince |
| **عنب** | grape |
| **كمثرى** | pear |

**ج) ما نتيجة الاجتياز الترتيبي لشجرة الفواكه المطلوب رسمها في ب) ؟**

**٤-١٤٧ اذكر الترتيب الذي يتم به تشغيل رؤوس شجرة المدن التالية عند استخدام الاجتياز**

أ) سابق الترتيب                ب) الترتيبي                  ج) لاحق الترتيب




شجرة بحث ثنائية (bst)

# أجوبة تمرينات الكتاب

## أجوبة تمرينات رقم ١

١–١

أ) افتراض صحيح (T).

ب) ليست افتراضا.

ج) افتراض خاطئ (F).

د) افتراض خاطئ (F).

هـ) افتراض صحيح (T).

١–٢

أ) افتراض. نفيه: $2+5 \neq 10$

ب) ليست افتراضا.

ج) افتراض. نفيه: for every positive integer n, $19340 \neq n.17$.

د) افتراض. نفيه: يوجد عدد صحيح زوجي أكبر من ٤ ليس مجموع عددين أوليين. (some even integer > 4 is not the sum of 2 primes).

هـ) ليست افتراضا.

١–٣

أ) True　　ب) True

ج) True　　د) True

هـ) False　　و) False

١–٤ اكتب جدول الصحة لكل افتراض من الافتراضات التالية:

أ)

| p | q | $p \wedge \overline{q}$ |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | T |
| F | T | F |

ب)

| p | q | $(\overline{p} \vee \overline{q}) \vee p$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |

| | | |
|---|---|---|
| F | F | T |

| | | |
|---|---|---|
| F | F | F |

ج)

| p | q | $(p \vee q) \wedge \overline{p}$ |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | F |

د)

| p | q | $(p \wedge q) \wedge \overline{p}$ |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

هـ)

| p | q | $(p \wedge q) \vee (\overline{p} \vee q)$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

و)

| p | q | r | $\overline{(p \wedge q)} \vee (r \wedge \overline{p})$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | F |
| T | T | F | F |
| T | F | T | T |
| T | F | F | T |
| F | T | T | T |
| F | T | F | T |
| F | F | T | T |
| F | F | F | T |

ز)

| p | q | $(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$ |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

ح)

| p | q | r | $\overline{(p \wedge q)} \vee (\overline{q} \vee r)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | T | F | F |
| T | F | T | T |
| T | F | F | T |

| | | | |
|---|---|---|---|
| F | T | T | T |
| F | T | F | T |
| F | F | T | T |
| F | F | F | T |

١–٥

أ) $p \wedge q$ ، خاطئة (F).

ب) $\overline{p \wedge q}$ ، صحيحة (T).

ج) $p \vee \overline{(q \wedge r)}$ ، صحيحة (T)

١–٦

أ) المقداد لا يدرس علم الحاسوب.

ب) المقداد يدرس علم الحاسوب والرياضيات.

ج) المقداد يدرس علم الحاسوب أو الرياضيات.

د) المقداد يدرس علم الحاسوب أو أنه لا يدرس الرياضيات.

هـ) المقداد يدرس علم الحاسوب ولا يدرس الرياضيات.

و) المقداد لا يدرس علم الحاسوب ولا يدرس الرياضيات.

١–٧

أ) اليوم الاثنين أو أن الطقس ممطر.

ب) اليوم ليس يوم الاثنين والطقس إما ممطر أو حار

ج) ليس الحال أن (اليوم الاثنين أو أن الطقس ممطر) والطقس حار.

د) (اليوم الاثنين والطقس ممطر) وليس الحال أن (الطقس حار أو أن اليوم الاثنين).

هـ) (اليوم الاثنين والطقس إما ممطر أو حار) و(الطقس حار أو إما أن الطقس ممطر أو أن اليوم الاثنين).

١–٨

أ) $\overline{p}$ ب) $p \wedge q$ ج) $p \wedge \overline{q}$

د) $\overline{p} \wedge \overline{q}$ هـ) $p \vee q$ و) $(p \vee q) \wedge \overline{p}$

١–٩

| p | q | p exor q |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

١–١٠

أ) إذا اجتهد خَبَّاب في الدراسة فسيجتاز اختبار الرياضيات المتقطعة.

ب) إذا حصلت الخنساء على 160 وحدة دراسية فقد تتخرج.

ج) إذا اشترى شرحبيل جهاز حاسوب فإنه قد حصل على 600 دينار.

د) إذا اجتازت حفصة مقرر الرياضيات المتقطعة فإنها ستدرس مقرر الخوارزميات.

هـ) إذا أمكن قراءة البرنامج بسهولة فإنه قد بُنِيَ بناءً جيدا.

١–١١ بعد كتابة كل من الافتراضات الشرطية في السؤال السابق (١–١٠) في الصيغة: إذا كان p فإن q (if p then q) [وهو ما عملناه في حل السؤال ١–١٠] يسهل كتابة كل من العكس والمكافئ العكسي ، فمثلا:

أ) العكسي: إذا اجتاز خَبَّاب اختبار الرياضيات المتقطعة فإنه قد اجتهد في الدراسة.

المكافئ العكسي: إذا لم يجتز خَبَّاب اختبار الرياضيات المتقطعة فإنه لم يجتهد في الدراسة.

ب) العكسي: إذا تخرجت الخنساء فإنها تكون قد حصلت على 160 وحدة دراسية.

المكافئ العكسي: إذا لم تتخرج الخنساء فإنها لم تحصل على 160 وحدة دراسية.

١–١٢

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| أ) | True | ب) | False | ج) | False |
| د) | False | هـ) | False | و) | True |
| ز) | False | ح) | True | | |

١–١٣

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| أ) | True | ب) | **غير معلومة** | ج) | **غير معلومة** |
| د) | True | هـ) | True | و) | **غير معلومة** |
| ز) | True | ح) | **غير معلومة** | ط) | **غير معلومة** |
| ي) | True | | | | |

١–١٤

أ) $p \to q$ ب) $(p \wedge r) \to q$

ج) $\overline{(r \wedge \overline{q}) \to r}$ د) $q \leftrightarrow (p \wedge \overline{r})$

١–١٥

أ) **إذا كان اليوم الاثنين فإن الطقس ممطر.**

ب) **إذا لم يكن الطقس ممطرا فإن الطقس حار واليوم الاثنين.**

ج) **إذا لم يكن اليوم الاثنين فإما أن الطقس ممطر أو حار.**

د) **ليس الحال أن اليوم الاثنين أو أن الطقس ممطر إذا وفقط إذا كان الطقس حاراً.**

هـ) **إذا كان اليوم الاثنين والطقس إما ممطر أو حار فإما أن الطقس حار أو أنه ممطر أو أن اليوم الاثنين.**

و) **إذا كان اليوم الاثنين أو (أنه ليس الاثنين وليس الحال أن الطقس ممطر أو حار) فإما أن اليوم الاثنين أو أنه ليس الحال أن (الطقس حار أو ممطر).**

١٦-١ أ) نفرض $p:\ 4<6\ ,\quad q:\ 9>12$

الافتراض المعطى: $p \to q$ ، وقيمته: false

عكسه: بالرموز $q \to p$ ، وبالكلمات $\text{if } 9>12\ ,\ \text{then } 4<6$ وقيمته: true.

مكافئه العكسي: بالرموز $\overline{q} \to \overline{p}$ ، وبالكلمات $\text{if}\ 9 \le 12 \text{ then } 4 \ge 6$ وقيمته: false.

ب) نفرض $p:\ 4>6\ ,\quad q:\ 9>12$

الافتراض المعطى: $p \to q$ ، وقيمته: true

عكسه: بالرموز $q \to p$ ، وبالكلمات $\text{if } 9>12\ ,\ \text{then } 4>6$ وقيمته: true.

مكافئه العكسي: بالرموز $\overline{q} \to \overline{p}$ ، وبالكلمات $\text{if}\ 9 \le 12 \text{ then } 4 \le 6$ وقيمته: true.

ج) نفرض $p:\ |1|<3,\quad q:\ -3<1<3$

الافتراض المعطى: $q \to p$ ، وقيمته: true

عكسه: بالرموز $p \to q$ ، وبالكلمات $\text{if } |1|<3,\ \text{then } -3<1<3$

وقيمته: true.

مكافئه العكسي: بالرموز $\overline{p} \to \overline{q}$

وبالكلمات $\text{if } |1| \ge 3,\ \text{then either } -3 \ge 1 \text{ or } 1 \ge 3$ وقيمته: true.

د) نفرض $p:\ |4|<3,\quad q:\ -3<4<3$

الافتراض المعطى: $q \to p$ ، وقيمته: true

عكسه: بالرموز $p \to q$ ، وبالكلمات $\text{if } |4|<3,\ \text{then } -3<4<3$

وقيمته: true.

مكافئه العكسي: بالرموز $\overline{p} \to \overline{q}$ ،

وبالكلمات $\text{if } |4| \ge 3,\ \text{then } -3 \ge 4 \text{ or } 4 \ge 3$

١–١٧

أ) $P \neq Q$ ب) $P \neq Q$ ج) $P \equiv Q$

د) $P \neq Q$ هـ) $P \neq Q$ و) $P \equiv Q$

ز) $P \neq Q$ ح) $P \neq Q$ ط) $P \neq Q$

ي) $P \neq Q$

١–١٨

| p | q | p imp1 q | p imp2 q |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | F | F |
| F | T | F | F |
| F | F | T | T |

**من جدولي الصحة يتبين لنا أن**

$$p \text{ imp1 } q \equiv q \text{ imp1 } p$$

١–١٩

أ) **لإثبات عدم تكافؤ افتراضين / طرفين يكفي إعطاء حالة واحدة (توافق واحد للافتراضات المكوِّنة) تختلف عندها قيمتا صحة الافتراضين. فمثلا عندما يكون كل من** $p, q$ **خاطئا** (F) **يكون الطرف الأيمن** $(p \leftrightarrow q)$ **صحيحا** (T) **، بينما يكون الطرف الأيسر** $((p \text{ imp2 } q) \wedge (q \text{ imp2 } p))$ **خاطئا.**

ب) **التغيير المقترح لا يغيِّر السطر الأخير في جدول صحة** imp2 **، وبالتالي تظل العلاقة المذكورة في الجزء أ) من السؤال صحيحة.**

١–٢٠

| p | q | $\overline{p \wedge q}$ | $\overline{p} \vee \overline{q}$ |
|---|---|---|---|
| T | T | F | F |
| T | F | T | T |
| F | T | T | T |
| F | F | T | T |

١–٢١

| p | q | $p \to q$ | $\bar{p} \vee q$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | F | F |
| F | T | T | T |
| F | F | T | T |

١–٢٢

أ) **العبارة دالة افتراضية. مجال التطبيق يمكن أن نعتبره جميع الأعداد الصحيحة.**

ب) **العبارة أمر ، وليست دالة افتراضية.**

ج) **العبارة أمر ، وليست دالة افتراضية.**

د) **العبارة دالة افتراضية. مجال التطبيق مجموعة جميع الكتب.**

هـ) **العبارة ليست دالة افتراضية حيث أنها لا تحتوي على أي متغيرات.**

و) **العبارة دالة افتراضية. مجال التطبيق مجموعة الأعداد الحقيقية.**

١–٢٣

ii) 11 **تَقْسِم** 77 . **صحيح** (true).

iii) 1 **يَقْسِم** 77 . **صحيح** (true).

iv) 3 **تَقْسِم** 77 . **خاطئ** (false).

v) **لكل عدد صحيح موجب** n: n **تَقْسِم** 77. **خاطئ** (false).

هـ) **يوجد عدد صحيح موجب** n **بحيث أن** n **تَقْسِم** 77. **صحيح** (true).
(for some n, n divides 77)

١–٢٤

أ) **كل واحد (كل شخص) أطول من كل واحد**
**خاطئ** (everyone is taller than everyone) (False).

**نفيه بالكلمات: شخص ما ليس أطول من شخص ما**
(someone is not taller than someone)
**نفيه بالرموز:** $\exists x \quad \exists y \quad \overline{T(x,y)}$

ب) **كل شخص أطول من شخص ما.**
(everyone is taller than someone)
**خاطئ** (False).

ج) **شخص ما أطول من كل شخص**
(someone is taller than everyone)
**خاطئ** (False).

د) **شخص ما أطول من شخص ما**
(someone is taller than someone)
**صحيح** (True).

١–٢٥ أ) $\exists x \quad \forall y \quad L(x,y)$
**نفيه:** $\forall x \quad \exists y \quad \overline{L(x,y)}$
ب) $\forall x \quad \forall y \quad L(x,y)$
ج) $\exists x \quad \exists y \quad L(x,y)$ **صحيح** (True).
د) $\forall x \quad \exists y \quad L(x,y)$

١–٢٦ أ) False **نفيه:** $\exists x \quad \exists y \quad \overline{P(x,y)}$
ب) True **نفيه:** $\exists x \quad \forall y \quad \overline{P(x,y)}$
ج) False **نفيه:** $\forall x \quad \exists y \quad \overline{P(x,y)}$
د) True **نفيه:** $\forall x \quad \forall y \quad \overline{P(x,y)}$

١–٢٧ أ) False. **مثال مناقض:** $x = ½$
**نفيه:** For some x, $x^2 \le x$
ب) True ت) True

ث) True. مـــثلا: إذا كانـــت $x = 0$ فـــإن الافـــتراض الشـــرطي (conditional proposition) if $x > 1$, then $x^2 > x$ يكـــون صحيحا (true) ، لأن الفرض (hypothesis) خاطئ (false).

ج) False ح) True

خ) False. مثال مناقض: $x = 2, y = 0$

د) True ذ) False

ر) True. مثلا خذ: $x = y = 0$

ز) False س) False

ش) False. مثال مناقض: $x = y = 2$

ص) False ض) False

ط) True. مثلا خذ: $x = 1, \quad y = \sqrt{8}$

ظ) True ع) True

غ) True. خذ: $x = 0$.. والآن لجميع قيم y: $x^2 + y^2 \geq 0$

ف) True ق) False

ك) True. لأي قيمـــة x ، إذا جعلنـــا $y = x - 1$ فـــإن الافـــتراض الشرطي: if $x < y$, then $x^2 < y^2$ سيكون صحيحا لأن الفرض (hypothesis) خاطئ.

ل) True م) True

١–٢٨ أ) i) صـحيحة. السـبب: نظـراً لأن العبـارة $\forall x \quad \forall y \quad P(x,y)$ صحيحة بغض النظر عن قيمة x التي نختارها ، فإن P(x, y) ستكون صحيحة لجميع قيم y. وبالتالي فلأي قيمة x ستكون P(x, y) صـحيحة لأي قيمـة خاصـة / معينـة (for any y particular y).

ii) **صحيحة. السبب: الافتراض** $P(x,\ y)$ **صحيح لجميع قيم** $x,\ y$. **ولذلك فبغض النظر عن قيمة** $x$ **التي نختارها ، فإن الافتراض** $\forall y\ P(x,y)$ **سيكون صحيحا.**

iii) **صحيحة. السبب: نظراً لأن الافتراض** $P(x,\ y)$ **صحيح لجميع قيم** $x,\ y$. **فيمكننا اختيار أي قيمتين لـ** $x,\ y$ **بحيث يكون** $P(x,\ y)$ **صحيحا.**

ب) i) **العبارة قد تكون خاطئة. مثلا افرض أن** $P(x, y)$ **تعني** $x > y$. **إذا كان مجال التطبيق هو مجموعة الأعداد الصحيحة ، فإن العبارة** $\forall x \quad \exists y \quad P(x, y)$ **ستكون صحيحة ، بينما العبارة** $\forall x \quad \forall y \quad P(x, y)$ **ستكون خاطئة.**

ii) **العبارة قد تكون خاطئة. مثلا افرض أن** $P(x, y)$ **تعني** $x \geq y$ ، **وافرض أن مجال التطبيق هو مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. العبارة** $\forall x \quad \exists y \quad P(x, y)$ **ستكون صحيحة ، بينما العبارة** $\exists x \quad \forall y \quad P(x, y)$ **ستكون خاطئة.**

iii) **صحيحة. السبب: نظراً لأن العبارة** $\forall x \quad \exists y \quad P(x, y)$ **صحيحة ، فإذا اخترنا أي قيمة لـ** $x$ ، **فإنه ستوجد قيمة لـ** $y$ **بحيث يكون عندها الافتراض** $P(x, y)$ **صحيحا. ولذلك فإن العبارة** $\exists x \quad \exists y \quad P(x, y)$ **صحيحة.**

ج) i) **العبارة قد تكون خاطئة. نفرض أن** $P(x, y)$ **تعني التعبير** $x \leq y$ . **إذا كان مجال التطبيق هو مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ، فإن العبارة** $\exists x \quad \forall y \quad P(x, y)$ **ستكون صحيحة ، بينما العبارة** $\forall x \quad \forall y \quad P(x, y)$ **ستكون خاطئة.**

ii) **العبارة قد تكون خاطئة. نفرض أن** $P(x, y)$ **تعني العبارة : "الاسم الأول** (first name) **لـ** $x$ **هو نفسه الاسم الأخير** (last name) **لـ** $y$ **". ونفرض أن مجال التطبيق يتكون من الأشخاص الثلاثة: مجاهد مجاهد ، وعطاء مجاهد ، وقتادة مجاهد. حينئذ**

تكـون العبـارة $\exists x \quad \forall y \quad P(x, y)$ صـحيحة ، بينمـا تكـون العبارة $\forall x \quad \exists y \quad P(x, y)$ خاطئة.

iii) صـحيحة. السـبب: نظـرا لأن العبـارة $\exists x \quad \forall y \quad P(x, y)$ صـــحيحة ، فتوجـــد قيمـــة لـــ x يكـــون عنـــدها الافـــتراض $\forall y \quad P(x, y)$ صحيحا . واختيار أي قيمة لـ y حينئذ يجعل $P(x, y)$ صحيحا. ولـذلك فـإن العبـارة $\exists x \quad \exists y \quad P(x, y)$ صحيحة.

د) i) العبارة قد تكون خاطئة. نفرض أن $P(x, y)$ تعني التعبير $x \le y$ . إذا كان مجال التطبيق هو مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ، فـإن العبـارة $\exists x \quad \exists y \quad P(x, y)$ تكـون صـحيحة ، بينمـا العبارة $\forall x \quad \forall y \quad P(x, y)$ تكون خاطئة.

ii) العبارة قد تكون خاطئة. نفرض أن $P(x, y)$ تعني التعبير $x > y$. ونفـرض أن مجـال التطبيـق هـو مجموعـة الأعـداد الصـحيحة الموجبة. حينئذ تكون العبارة $\exists x \quad \exists y \quad P(x, y)$ صحيحة ، بينما تكون العبارة $\forall x \quad \exists y \quad P(x, y)$ خاطئة.

iii) العبارة قد تكون خاطئة. نفرض أن $P(x, y)$ تعني التعبير $x > y$. ونفـرض أن مجـال التطبيـق هـو مجموعـة الأعـداد الصـحيحة الموجبة. حينئذ تكون العبارة $\exists x \quad \exists y \quad P(x, y)$ صحيحة ، بينما تكون العبارة $\exists x \quad \forall y \quad P(x, y)$ خاطئة.

١–٢٩ –أ) لا تكـافئ العبـارة المعطـاة. نفـرض أن $P(x, y)$ تعني التعبير $x < y$. إذا كـان مجـال التطبيـق هـو مجموعـة الأعـداد الصـحيحة ، فـإن العبـارة $\overline{\exists x \quad \forall y \quad P(x, y)}$ تكـــــون صـــــحيحة ، بينمـــــا العبـــــارة $\overline{\forall x \quad \exists y \quad P(x, y)}$ تكون خاطئة.

ب) لا تكافئ العبارة المعطاة. نفرض أن $P(x, y)$ تعني التعبير $x > y$. إذا كان مجـال التطبيـق هـو مجموعـة الأعـداد الصـحيحة الموجبـة ، فـإن العبـارة

$\forall x \ \overline{\exists y \ P(x, y)}$ تكـــــون خاطئـــــة ، بينمـــــا العبـــــارة $\overline{\forall x \ \exists y \ P(x, y)}$ تكون صحيحة.

ج) تكافئ العبارة المعطاة بقاعدة دي مورجان.

د) لا تكافئ العبارة المعطاة. نفرض أن $P(x, y)$ تعني التعبير $x < y$. إذا كـان مجـال التطبيـق هـو مجموعـة الأعـداد الصـحيحة ، فـإن العبـارة $\exists x \ \exists y \ \overline{P(x, y)}$ تكـــــون صــــحيحة ، بينمـــــا العبـــــارة $\overline{\forall x \ \exists y \ P(x, y)}$.

١-٣٠ أ)

| p | q | $p \to q$ | $q \to p$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | F | T |
| F | T | T | F |
| F | F | T | T |

أحد الافتراضين الشرطيين $p \to q$ ,$q \to p$ يكون صحيحا لأنه في أي صف في جدول الصحة المبين تكون إحدى القيمتين في العمودين الأيمنين T.

ب) العبارة التي نعلم أنها خاطئة: "جميع الأعداد النسبية موجبة أو أن جميع الأعداد الحقيقية الموجبة نسبية" تكافئ بالرموز العبارة

$$(\forall x(P(x) \to Q(x))) \vee (\forall x(Q(x) \to P(x)))$$

ولا تكافئ العبارة المعطاة في السؤال:

$$\forall x((P(x) \to Q(x)) \vee (Q(x) \to P(x)))$$

وهي عبارة صحيحة.

فالالتـــباس هـــنا نـــتج عـــن محـــاولة توزيـــع (distributing) "$\forall$" (for all) على " $\vee$ " (or).

١–٣١

| السبب | الخطوة |
|---|---|
| $b + 0 = b$ **لجميع الأعداد الحقيقية** b | (١) $x.0 + 0 = x.0$ |
| $b + 0 = b$ **لجميع الأعداد الحقيقية** b | (٢) $= x.(0+0)$ |
| $a(b+c) = ab+ac$ **لجميع الأعداد الحقيقية** a, b, c | (٣) $= x.0 + x.0$ |
| $[a+b=a+c] \Rightarrow b=c$ (**حيث** $a \equiv x.0, b \equiv x.0, c \equiv 0$) | (٤) $\Rightarrow x.0 = 0$ |

١–٣٢

| السبب | الخطوة |
|---|---|
| **فرضا** | (١) $x.y = 0, x \neq 0, y \neq 0$ |
| **السؤال السابق (١–٣١)** | (٢) $x.0 = 0$ |
| $[a=c, b=c] \Rightarrow a=b$ (**حيث** $a \equiv xy, b \equiv x.0, c = 0$) | (٣) $xy = x.0$ |
| $[ab = ac \;\&\; a \neq 0] \Rightarrow b=c$ (**حيث** $a \equiv x, b \equiv y, c \equiv 0$) **والخطوتان (١) ، (٣).** | (٤) $y = 0$ |

**١–٣٣ نفرض أن كل صندوق يحتوي على أقل من 12 كرة. أي أن أيّ صندوق يحتوي على الأكثر على 11 كرة. وبالتالي فالتسعة صناديق تحتوي على الأكثر على 99(= 11 × 9) كرة ، وهذا يناقض الفرض أن لدينا مائة كرة.**

**١–٣٤ نفرض أن الاستنتاج المعطَى في السؤال خاطئ ، أي نفرض أنه لا توجد أي حافظتي نقود تحتويان على العدد نفسه من القطع المعدنية. ونفرض أننا سنرتب هذه الحافظات ترتيبا تصاعديا حسب القطع المعدنية التي تحتوي عليها. وحيث أن أي حافظة تحتوي على الأقل على قطعة واحدة ،**

(فرضــا) ، فـإن الحافظـة الأولى تحتـوي علـى الأقـل علـى قطعـة واحـدة ، والحافظة الثانية تحتوي على الأقل على قطعتين ، ... وهكـذا. وبالتـالي فإن العدد الإجمالي للقطع المعدنية في الحافظات يساوي على الأقل

$$1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45$$

وهذا يناقض الفرض أن لدينا 40 قطعة. وهكذا يكتمل البرهان بالتناقض.

١-٣٥

أ) الحجة صالحة (valid)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

ب) الحجة غير صالحة (invalid)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \overline{r} \to \overline{q} \\ \hline \therefore r \end{array}$$

ج) الحجة صالحة

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow r \\ r \\ \hline \therefore p \end{array}$$

د) الحجة غير صالحة

$$\begin{array}{l} (p \vee r) \to q \\ q \\ \hline \therefore \overline{p} \to r \end{array}$$

هـ) الحجة صالحة

$$\begin{array}{l} p \to (q \vee r) \\ \overline{q} \wedge \overline{r} \\ \hline \therefore \overline{p} \end{array}$$

١-٣٦

أ) If 4 megabytes is better than no memory at all, then we will buy a new computer. If 4 megabytes is better than no memory at all, then we will buy more memory. Therefore, if 4 megabytes is better than no memory at all, then we will buy a new computer and we will buy more memory. Valid.

ب) If 4 megabytes of memory is better than no memory at all, then either we will buy a new computer or we will buy more memory. If we will buy a new computer, then we will not buy more memory. Therefore, if 4 megabytes of memory is better than no memory at all, then we will buy a new computer. Invalid.

ج) If 4 megabytes of memory is better than no memory at all, then we will buy a new computer. If we will buy a new computer, then we will buy more memory. Therefore, we will buy more memory. Invalid.

د) If we will not buy a new computer, then 4 megabytes is not better than no memory at all. We will buy a new computer. Therefore, 4 megabytes is better than no memory at all. Invalid.

هـ) If 4 megabytes of memory is better than no memory at all, then we will buy a new computer. If we will buy a new computer, then we will buy more memory. 4 megabytes of memory is better than no memory at all. Therefore, we will buy more memory. Valid.

١-٣٧ أ) **الحجة غير صالحة** ب) **الحجة صالحة**

ج) **الحجة صالحة** د) **الحجة غير صالحة**

هـ) **الحجة صالحة**

و) **الحجة غير صالحة. إذا كانت**

p = true, q = false, r = true

فإن الفروض تكون جميعها صحيحة (true) ، بينما الاستنتاج يكون خاطئا (false).

١–٣٨ نفرض أن $p_1, p_2, \cdots, p_n$ جميعها صحيحة (true). نظراً لأن الحجة $p_1, p_2 / \therefore p$ صالحة ، فلذلك تكون p صحيحة (true). ونظراً لأن $p, p_3, \cdots, p_n$ جميعها صحيحة ، والحجة $p, p_3, \cdots, p_n / \therefore c$ صالحة ، فلذلك تكون c صحيحة (true). وهكذا فإن الحجة

$$p_1, p_2, \cdots, p_n / \therefore c$$

تكون صالحة.

١–٣٩ أ) الإضافة (addition).

ب) قانون الفَصْل / "مودس بوننز " (Modus ponens).

ج) القياس المنطقي الفَصْلي (Disjunctive syllogism).

د) الاختيار الشمولي عند عنصر (Universal instantiation).

١–٤٠ أ) نفرض أن p, q, r هي الافتراضات التالية:

p: هناك وقود في السيارة.

q: أذهب إلى المسجد الأبعد والأكثر جمعا.

r: أحضر الدرس الأسبوعي.

وبناءً عليه تكون الفروض (hypotheses) المعطاة هي كما يلي:

$$p \to q$$
$$q \to r$$
$$p$$

باستخدام القياس المنطقي الفرضي:

$$p \to q, \ \ q \to r / \therefore p \to r$$

نستنتج أن $p \to r$ .

وباستخدام قانون الفَصْل (مودس بونز)

$$p \to r,\ \ p / \therefore r$$

نستنتج r. وحيث أن r تعني الافتراض: أحضر الدرس الأسبوعي ، نخلص إلى أن الاستنتاج المذكور يتبع الفروض المعطاة.

ب) نفرض أن p, q, r هي الافتراضات المعرَّفة في أ). ونفرض أن s هو الافتراض s: هناك خلل في جهاز نقل الحركة بالسيارة. وبناءً عليه تكون الفروض المعطاة هي كما يلي:

$$p \to q,\ \ q \to r,\ \ \bar{r}$$

باستخدام القياس المنطقي الفرضي:

$$p \to q,\ \ q \to r / \therefore p \to r$$

نستنتج أن $p \to r$.

وباستخدام قاعدة مودس تولنز:

$$p \to r,\ \ \bar{r} / \therefore \bar{p}$$

نستنتج $\bar{p}$.

ثم باستخدام قاعدة الإضافة:

$$\bar{p} / \therefore\ \ \bar{p} \vee s$$

نصل إلى الاستنتاج المطلوب.

ج) نفرض أن p, q, r, s تعني الافتراضات التالية:

p: المثنى حفظ كتاب الله تعالى

q: الحارث استطاع ترتيل القرآن ترتيلا صحيحا

r: أشترى القرص المضغوط

s: أشترى جهاز تشغيل الأقراص المضغوطة.

وبناءً عليه تكون الفروض المعطاة هي كما يلي:

$$(p \vee q) \to r,\quad p, s$$

باستخدام قانون الإضافة

$$p / \therefore p \vee q$$

**نستنتج $p \vee q$ . ثم باستخدام قانون الفَصْل (مودس بوننز):**

$$p \vee q,\ \ (p \vee q) \rightarrow r / \therefore r$$

**نستنتج** r.

**ومن** r, s **نستخدم قانون العطف** (conjunction)

$$r,\ \ s / \therefore r \wedge s$$

**نستنتج $r \wedge s$ وهو الاستنتاج المطلوب.**

**د) نفرض أن لدينا الدالتين الافتراضيتين:**

P(x): **الطالب** x **في الفصل عنده كتاب نماذج حلول التمرينات.**

Q(x): **الطالب** x **يستطيع فهم مادة الرياضيات المتقطعة جيداً.**

**وبالتالي تكون الفروض المعطاة في السؤال هي:**

$$\forall x \quad P(x)$$

$$\forall x \quad P(x) \rightarrow Q(x)$$

**بتطبيق قاعدة الاختيار الشمولي عند عنصر** (universal instantiation) **نستنتج:**

P(همام) ,

P(همام) → Q(همام)

**والآن بتطبيق قانون الفَصْل (مودس بوننز) نستنتج** Q **(همام) والذي يعني الافتراض: هُمام يستطيع فهم مادة الرياضيات المتقطعة جيداً.**

**هـ) نفرض أن لدينا الدوال الافتراضية:**

P(x): x **عضو في كتائب حطين.**

Q(x): x **يستطيع إطلاق صواريخ القسام لمسافات بعيدة.**

R(x): x **يلقي الرعب في قلوب الأعداء.**

**وبالتالي تكون الفروض المعطاة في السؤال هي:**

P(القعقاع), Q(القعقاع),

$$\forall x Q(x) \rightarrow R(x)$$

بتطبيق قاعدة الاختيار الشمولي عند عنصر (universal instantiation)

نستنتج $Q$ (القعقاع) $\to R$ (القعقاع) ، وباستخدام قاعدة الفصل

$$Q(\text{القعقاع}) \to R(\text{القعقاع}),$$
$$Q(\text{القعقاع})$$

نستنتج: $\therefore\ R(\text{القعقاع})$

والآن باستخدام قاعدة العطف (conjunction)

$$P(\text{القعقاع})$$
$$R(\text{القعقاع})$$

نستنتج: $\therefore\ P(\text{القعقاع}) \wedge R(\text{القعقاع})$

وأخيرا بتطبيق قاعدة التعميم الوجودي (existential generalization) نستنتج

$$\exists x \quad P(x) \wedge R(x)$$

والتي تعني (بالكلمات): عضو ما في كتائب حطين يلقي الرعب في قلوب الأعداء. أي أن الاستنتاج المذكور ينتج من الفروض المعطاة.

و) نفرض أن لدينا الدوال الافتراضية:

$P(x)$: $x$ طالب في شعبة الرياضيات المتقطعة.

$Q(x)$: $x$ يحب طلب العلم في تخصص الرياضيات المتقطعة.

$R(x)$: $x$ دَرَسَ نظرية المعلومات.

وبالتالي تكون الفروض المعطاة في السؤال هي:

$$\forall x \quad P(x) \to Q(x),$$
$$\exists x \quad P(x) \cap R(x)$$

بتطبيق قاعدة الاختيار الوجودي عند عنصر (existential instantiation) نستنتج أنه لعنصرٍ ما في مجال التطبيق:

$$P(d) \cap \overline{R(d)} \text{ for some } d \in D$$

وباستخدام قاعدة التبسيط (simplification):

حيث أن: $P(d) \wedge \overline{R(d)}$

نستنتج كلاً من $P(d), \quad \overline{R(d)}$

وبتطبيـــق قاعـــدة الاختيـــار الشـــمولي عنـــد عنصـــر (universal instantiation)) نستنتج $P(d) \rightarrow Q(d)$

والآن بتطبيق قاعدة الفَصْل (مودس بوننز):

$$\begin{array}{l} P(d) \rightarrow Q(d) \\ \underline{P(d) \qquad\qquad} \\ \therefore Q(d) \end{array}$$

وباستخدام قاعدة العطف (conjunction)

$$\begin{array}{l} Q(d) \\ \underline{\overline{R(d)}} \\ \therefore Q(d) \wedge \overline{R(d)} \end{array}$$

وبتطبيـق مبـدأ التعمـيم الوجـودي (existential generalization)

نستنتج أنه $\exists x \quad Q(x) \wedge \overline{R(x)}$

أي – بالكلمات – يوجد طالب ما يحب طلب العلم في تخصص الرياضيات المتقطعة ، ولم يدرس نظرية المعلومات من قبل. وهكذا ، فإن الاستنتاج المذكور يتبع الفروض المعطاة.

١-٤١ أ) نكـوِّن جـدول الصـحة لجميـع الافتراضـات الـتي تظهـر في قاعـدة الاستدلال المطلوب إثبات صلاحيتها:

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $\overline{q}$ | $\overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F |
| T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | T |
| F | F | T | T | T |

نلاحـظ مـن الجـدول أنـه كلمـا كانـت الفـروض (hypotheses): $[p \rightarrow q, \overline{q}]$ صحيحة (true) فإن الاستنتاج (conclusion): $[\overline{q}]$ يكون أيضا صحيحا (true) ، أي أن الحجة صالحة.

ب) جدول الصحة

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

**يبيِّن أنه كلما كان** p **صحيحا** (true) **فإن** $p \vee q$ **يكون أيضا صحيحا** (true).

ج) **جدول الصحة**

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

**يبيِّن أنه كلما كان** $p \vee q$ **صحيحا** (true) **فإن** p **يكون أيضا صحيحا.**

د) **جدول الصحة السابق في ج) يبيِّن أنه كلما كان الفرضان** $p, \ q$ **صحيحين** (true) **، فإن الاستنتاج** $p \wedge q$ **يكون أيضا صحيحا.**

هـ) **جدول الصحة**

| p | q | r | $p \to q$ | $q \to r$ | $p \to r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F | T |
| T | F | T | F | T | T |
| T | F | F | F | T | F |
| F | T | T | T | T | T |
| F | T | F | T | F | T |
| F | F | T | T | T | T |
| F | F | F | T | T | T |

**يبيِّن أنه كلما كان الفرضان** $p \to q, q \to r$ **صحيحين** (true) **فإن الاستنتاج** $p \to r$ **يكون أيضا صحيحا. وبالتالي فإن القياس المنطقي الفرضي حجة صالحة.**

و) **جدول الصحة**

| p | q | $p \vee q$ | $\overline{p}$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | F |
| T | F | T | F |
| F | T | T | T |
| F | F | F | T |

**يبيِّن أنه كلما كان $\overline{p}$ $p \vee q$ , صحيحين** (true) **، فإن** q **يكون أيضا صحيحا. ولذلك فإن القياس المنطقي الفَصْلي قاعدة استدلال صالحة.**

**١-٤٢ أ) من التعريف: الافتراض** $\forall x \quad P(x)$ **يكون صحيحا** (true) **عندما يكون** P(x) **صحيحا لجميع قيم** x **الواقعة في مجال التطبيق. وحيث أننا قد أُعطينا فرضا أن** P(d) **صحيح لأي** d **واقعة في مجال التطبيق** D **، فلذلك يكون** $\forall x \quad P(x)$ **صحيحا.**

**ب) من التعريف: الافتراض** $\exists x \in D \quad P(x)$ **يكون صحيحا** (true) **عندما يكون** P(x) **صحيحا لقيمةٍ ما** x **في مجال التطبيق. ويأخذ** x **مساوية لإحدى قيم** $d \in D$ **التي عندها يكون** P(d) **صحيحا ، فإننا نجد أن** P(d) **صحيح** (true) **لقيمةٍ ما** $d \in D$ **، أي أن:**

P(d) is true for some $d \in D$

**ج) من التعريف: الافتراض** $\exists x \in D \quad P(x)$ **يكون صحيحا** (true) **عندما يكون** P(x) **صحيحا لقيمةٍ ما** x **في مجال التطبيق. وحيث أن** P(d) **صحيح** (true) **لقيمة ما** $d \in D$ **، فلذلك يكون الافتراض** $\exists x \in D \quad P(x)$ **صحيحا** (true).

**١-٤٣ أ) الخطوة الأساسية:** $1 = 1^2$

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن المعادلة صحيحة عند** n.

$$1 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

**ب) الخطوة الأساسية:** $1.2 = (1\,.\,2\,.\,3)/3 = 2$

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن المعادلة صحيحة عند** n.

$$1.2 + 2.3 + \cdots + n(n+1) + (n+1)\,(n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)\,(n+2)}{3} + (n+1)\,(n+2) = \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{3}$$

**ج) الخطوة الأساسية:** $1(1) = 2 - 1 = 1$

**الخطوة الاستقرائية:** نفرض أن المعادلة صحيحة عند n.

$$1(1!)+2(2!)+\cdots+n(n!)+(n+1)\,(n+1)!$$
$$=(n+1)!-1+(n+1)\,(n+1)!=(n+2)!-1$$

د) **الخطوة الأساسية:** $1^2=(1\,.\,2\,.\,3)/6=1$

**الخطوة الاستقرائية:** نفرض أن المعادلة صحيحة عند n.

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$
$$=\frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{6}$$

هـ) **الخطوة الأساسية:** $1^3=(1\,.\,2)/2=1$

**الخطوة الاستقرائية:** نفرض أن المعادلة صحيحة عند n.

$$1^2-2^2+\cdots+(-1)^{n+1}n^2+(-1)^{n+2}(n+1)^2$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}+(-1)^{n+2}(n+1)^2$$
$$=\frac{(-1)^{n+2}(n+1)\,(n+2)}{2}$$

و) **الخطوة الأساسية:** $1^3=[(1\,.\,2)/2]^2=1$

**الخطوة الاستقرائية:** نفرض أن المعادلة صحيحة عند n.

$$1^3-2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3$$
$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

ز) **الخطوة الأساسية:** $1/(1\,.\,3)=1/(2+1)=1/3$

**الخطوة الاستقرائية:** نفرض أن المعادلة صحيحة عند n.

$$\frac{1}{1.3}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\,(2n+1)}+\frac{1}{(2n-1)\,(2n+3)}$$
$$=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n-1)\,(2n+3)}$$
$$=\frac{n+1}{2n+3}$$

ح) **الخطوة الأساسية:** $1/(2\,.\,4)=1/2-(1\,.\,3)/(2\,.\,4)=1/8$

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن المعادلة صحيحة عند n.**

$$\frac{1}{2.4}+\frac{1.3}{2.4.6}+\cdots+\frac{1.3\cdots(2n-1)}{2.4\cdots(2n+2)}+\frac{1.3\cdots(2n-1)\,(2n+1)}{2.4\cdots(2n+2)\,(2n+4)}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1.3\cdots(2n+1)}{2.4\cdots(2n+2)}+\frac{1.3\cdots(2n-1)\,(2n+1)}{2.4\cdots(2n+2)\,(2n+4)}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1.3\cdots(2n+3)}{2.4\cdots(2n+4)}$$

ط) **الخطوة الأساسية:** $1/3=3/4-1/4-1/6=1/(4-1)$

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن المعادلة صحيحة عند n.**

$$9.\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}+\frac{1}{(n+2)^2-1}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{(n+2)2-1}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+2)}-\frac{1}{2(n+3)}$$

١-٤٤ أ) **الخطوة الأساسية:** $1/2\le 1/2$

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن المتباينة صحيحة عند n.**

$$\frac{1.3.5\cdots(2n-1)\,(2n+1)}{2.4.6(2n)(2n+2)}\ge\frac{1}{2n}.\frac{2n+1}{2n+2}$$

$$=\frac{2n+1}{2n}.\frac{1}{2n+2}$$

$$\ge\frac{1}{2n+2}$$

ب) **الخطوة الأساسية:** $1/2\le 1/\sqrt{2}$

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن المتباينة صحيحة عند n. ولاحظ أن هذا يعني أن:**

$$\frac{1.3\cdots(2n-1)\,(2n+1)}{2.4\cdots(2n)\,(2n+2)}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\frac{2n+1}{2n+2}$$

**ويكتمل البرهان إذا استطعنا إثبات أن**

$$\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

ويمكننا وضع هذه المتباينة في الصورة

$$\left(\frac{n+2}{(n+1)}\right)^{1/2} \le \frac{2n+2}{2n+1}$$

$$\frac{n+2}{(n+1)} \le \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)^2}$$

$$(n+2)(2n+1)^2 \le 4(n+1)^3$$

$$4n^3 + 12n^2 + 9n + 2 \le 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4$$

$$-2 \le 3n.$$

وهذه المتباينة الأخيرة صحيحة لجميع قيم $n \ge 1$.

ج) الخطوة الأساسية: ضع $n = 3$: $8 = 2^3 \le 2 \times 3 + 1 \equiv 7$

الخطوة الاستقرائية: نفرض أن المتباينة صحيحة عند n.

$$2(n+1)+1 = (2n+1)+2 \le 2^n + 2 \le 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

د) الخطوة الأساسية: ضع $n = 4$: $16 = 4^2 \le 2^4 \equiv 16$

الخطوة الاستقرائية: نفرض أن المتباينة صحيحة عند n.

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \le 2^n + 2n + 1$$

$$\le 2^n + 2^n \quad \text{[من المتباينة ج)]}$$

$$= 2^{n+1}$$

هـ) الخطوة الأساسية: $(1+x)^1 \ge 1 + 1.x$

الخطوة الاستقرائية: نفرض أن المتباينة عند n.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$$

$$\ge (1+nx)(1+x)$$

$$= 1 + nx + x + nx^2$$

$$\ge 1 + (n+1)x$$

١-٤٥ أ) الخطوة الأساسية: $6(= 7^1 - 1)$ تقبل القسمة على 6.

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن العبارة صحيحة عند n.**

**أي أن 6 تَقْسِم** $7^n - 1$

$$7^{n+1} - 1 = 7.7^n - 1 = (6+1).7^n - 1 = 6.7^n + (7^n - 1)$$

**وحيث أن 6 تَقْسِم كلا من** $6.7^n$ **و** $(7^n - 1)$ **تَقْسِم مجموعهما.**

**ب) الخطوة الأساسية:** $5(11^1 - 6)$ **تقبل القسمة على 5.**

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن العبارة صحيحة عند n.**

**أي أن 5 تَقْسِم** $11^n - 6$

$$11^{n+1} - 6 = 11^n.11 - 6 = 11^n(10+1) - 6 = 10.11^n + 11^n - 6$$

**وحيث أن 5 تَقْسِم كلا من** $10.11^n$ **و** $(11^n - 6)$ **فهي تَقْسِم مجموعهما.**

**ج) الخطوة الأساسية:** $36(= 6.7^1 - 2.3^1)$ **تقبل القسمة على 4.**

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن العبارة صحيحة عند n.**

**أي أن 4 تَقْسِم** $6.7^n - 2.3^n$

$$\begin{aligned}6.7^{n+1} - 2.3^{n+1} &= 7.6.7^n - 3.2.3^n\\ &= 6.7^n - 2.3^n + 6.6.7^n - 2.2.3^n\\ &= 6.7^n - 2.3^n + 36.7^n - 4.3^n,\end{aligned}$$

**وحيث أن 4 تَقْسِم كلا من** $6.7^n - 2.3^n$ **و** $36.7^n$ **و** $-4.3^n$ **فهي تَقْسِم مجموعهم.**

**د) الخطوة الأساسية:** $8(= 3^1 + 7^1 - 2)$ **تقبل القسمة على 8.**

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن العبارة صحيحة عند n.**

**أي أن 8 تَقْسِم** $3^n + 7^n - 2$

$$3^{n+1} + 7^{n+1} - 2 = 3.3^n + 7.7^n - 2$$
$$= 3(3^n + 7^n - 2) + 4.7^n + 4$$
$$= 3(3^n + 7^n - 2) + 4(7^n + 1)$$

يمكننا باستخدام الاستقراء إثبات أن 2 تَقْسِم $(7^n + 1)$ ، وبالتالي فإن 8 تَقْسِم $4(7^n + 1)$ ، وحيث أنها تَقْسِم أيضا $3(3^n + 7^n - 2)$ فإنها تَقْسِم مجموعهما.

**١–٤٦** $n/(n+1)$

**١–٤٧ أ) الخطوة الأساسية:** $2 = 1(1+1) = 2$

**الخطوة الاستقرائية:** نفرض أن العبارة صحيحة عند n.

$$2 + 4 + \cdots + 2n + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1)$$
$$= (n+1)\,(n+2)$$

**ب) الخطوة الأساسية:** $2^2 = 2(1+1)(2+1)/3 = 4$

**الخطوة الاستقرائية:** نفرض أن العبارة صحيحة عند n.

$$2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 + [2(n+1)]^2$$
$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} + [2(n+1)]^2$$
$$= \frac{2\,(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{3}$$

**ج) الخطوة الأساسية:** $1/2=1-1/2=1/2$

**الخطوة الاستقرائية:** نفرض أن العبارة صحيحة عند n.

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$
$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$
$$= 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

**د) الخطوة الأساسية:** $4 = 2^2 < 1 + (1+1)2^1 = 5$

**الخطوة الاستقرائية:** نفرض أن العبارة صحيحة عند n.

$$2^{n+2} = 2.2^{n+1} < 2[1+(n+1)2^{n}] = 2+(n+1)2^{n+1}$$
$$= 1+[1+(n+1)2^{n+1}]$$
$$< 1+[2^{n+1}+(n+1)2^{n+1}]$$
$$= 1+(n+2)2^{n+1}$$

**١-٤٨ أ) الخطوة الأساسية** $(n = 6,7)$:

**يمكن دفع بريد قيمته 6 فلسا باستخدام ثلاثة طوابع من فئة الفلسين. ويمكن دفع بريد قيمته 7 فلسا باستخدام طابع واحد من فئة 7 فلسا.**

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن** $n \geq 8$ **، وأن بريدا قيمته k فلسا أو أكثر يمكن دفع قيمته باستخدام طوابع بريدية من فئة 2 فلسا وفئة 6 فلسا فقط ، حيث** $6 \leq k < n$ **. وبالفرض الاستقرائي** (inductive assumption) **يمكننا دفع بريد قيمته n-2 فلسا. ويمكننا إضافة طابع قيمته 2 فلسا لدفع بريد قيمته n فلسا.**

**ب) الخطوة الأساسية: تحقق مباشرة من الحالات:** $n = 24, \ldots, 28$.

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن العبارة صحيحة بالنسبة لبريد قيمته i فلسا ، حيث** $24 \leq i < n$ **. يجب أن نثبت أنه يمكننا دفع بريد قيمته n فلسا باستخدام طوابع من فئتي 5 فلسا و7 فلسا فقط. نفرض أن** $n > 28$. **وبالتالي تكون** $n > n-5 > 23$. **وبالفرض الاستقرائي يمكننا دفع بريد قيمته n-5 فلسا باستخدام طوابع من فئتي 5 فلسا و7 فلسا. أضف طابعا من فئة 5 فلسا للحصول على بريد قيمته n فلسا.**

**١-٤٩ أ) الخطوة الأساسية** $(n = 4)$: **يمكننا دفع بريد قيمته 4 فلسا باستخدام طابعي بريد من فئة 2 فلسا.**

**الخطوة الاستقرائية:** نفرض أنه يمكننا دفع بريد قيمته n فلسا – حسب المطلوب – ونثبت أنه يمكننا دفع بريد قيمته n+1 فلسا. إذا كان من بين الطوابع المستخدمة لدفع بريد قيمته n فلسا على الأقل طابع واحد من فئة 5 فلسا ، فإننا نستبدل بطابع من فئة 5 فلسا ثلاثة طوابع من فئة 2 فلسا لدفع بريد قيمته n+1 فلسا. وإذا لم يكن هناك أي طابع من فئة 5 فلسا من بين الطوابع المستخدمة لدفع البريد الذي قيمته n فلسا ، فهناك على الأقل طابعان من فئة 2 فلسا (لأن $n \geq 4$). وفي هذه الحالة نستبدل بطابعين من فئة 2 فلسا طابعا واحدا من فئة 5 فلسا لدفع بريد قيمته n+1 فلسا.

ب) **الخطوة الأساسية** (n=6) : نثبتها باستخدام ثلاثة طوابع من فئة الفلسين.

**الخطوة الاستقرائية:** نفرض أنه يمكننا دفع بريد قيمته n فلسا حسب المطلوب. إن كان هناك من بين الطوابع على الأقل طابع واحد من فئة 7 فلسا فضع بدلاً منه أربعة طوابع من فئة الفلسين ، وذلك لدفع بريد قيمته n+1 فلسا. وإن لم يكن هناك أي طابع من فئة 7 فلسا ، فهناك على الأقل ثلاثة طوابع من فئة الفلسين (لأن $n \geq 6$). ضع حينئذ طابعا واحدا من فئة 7 فلسا بدلا من ثلاثة طوابع من فئة الفلسين لدفع بريد قيمته n+1 فلسا. وبذلك تتم الخطوة الاستقرائية.

ج) **الخطوة الأساسية** (n=24): نثبتها باستخدام طابعين من فئة 5 فلسا ، وطابعين من فئة 7 فلسا.

**الخطوة الاستقرائية:** نفرض أنه يمكننا دفع بريد قيمته n فلسا حسب المطلوب. إذا كان هناك على الأقل طابعان من فئة 7 فلسا ، فضع بدلا من طابعين من فئة 7 فلسا ثلاثة طوابع من فئة 5 فلسا لدفع بريد قيمته n+1 فلسا. وإن كان هناك بالضبط طابع واحد من فئة 7 فلسا ، فهناك على الأقل أربعة طوابع من فئة 5 فلسا (لأن $n \geq 24$). وفي هذه الحالة ضع بدلا من خمسة طوابع من فئة 5 فلسا ثلاثة طوابع من فئة 7

فلسا وطابعا واحدا من فئة 5 فلسا ، وذلك لدفع بريد قيمته n+1 فلسا.
وهكذا تتم الخطوة الاستقرائية.

١–٥٠ الخطوة الأساسية:

$$S_1 = (1+2)\,(1-1) = 0 \neq 2$$

الخطوة الاستقرائية:

$$\begin{aligned} 2+\cdots+2n+2(n+1) &= S_n + 2n + 2 \\ &= (n+2)(n-1)+2n+2 \\ &= (n+3)n \\ &= S_{n+1} \end{aligned}$$

١–٥١ الخطوة الأساسية (n=2): $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}<\frac{8}{6}=\frac{4}{3}=\frac{2^2}{2+1}$

الخطوة الاستقرائية: نفرض أن العبارة صحيحة عند n.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}<\frac{n^2}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}$$

يتم إثبات الخطوة الاستقرائية إذا أثبتنا أن

$$\frac{n^2}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}<\frac{(n+1)^2}{n+2}$$

وإذا ضربنا هذه المتباينة الأخيرة بالمقدار (n+2) (n+1) يكون المطلوب إثبات أن

$$n^2(n+2)+(n+1)^2<(n+1)^3$$

وهذه المتباينة متحققة لأن:

طرفها الأيسر = $n^3+3n^2+2n+1$

بينما طرفها الأيمن = $n^3+3n^2+3n+1$

١–٥٢ أ) الخطوة الأساسية (n=0): $H_{2^0}=H_1=1\geq 1=1+\frac{0}{2}$

الخطوة الاستقرائية: نفرض أن المتباينة صحيحة عند n. أي أن

$$H_{2^n} \ge 1+\frac{n}{2}, \qquad n \ge 0$$

$$H_{2^{n+1}} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= H_{2^n} + \frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\ge 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= 1+\frac{n}{2}+2^n.\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2} = 1+\frac{n+1}{2}$$

**ب) الخطوة الأساسية** (n=0): $H_{2^0} = H_1 = 1 \le 1 = 1+0$

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن المتباينة صحيحة عند n. أي أن**

$$H_{2^n} \le 1+n$$

$$H_{2^{n+1}} = H_{2^n} + \frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\le 1+n+\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}$$

$$= 1+n+\frac{2^n}{2^n+1} \le 1+n+1 = 2+n.$$

**ج) الخطوة الأساسية** (n=1):

$$H_1 = 1 = (1+1)H_1 - 1 = 2H_1 - 1 = 2-1 = 1$$

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن المعادلة صحيحة عند n. أي أن**

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_n = (n+1)H_n - n.$$

**وقبل أن نكمل التحقق من الخطوة الاستقرائية نلاحظ تحقق العلاقة التالية (انظر تعريف $H_k$):**

$$H_n = H_{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} H_1 + H_2 + \cdots + H_n + H_{n+1} &= (n+1)H_n - n + H_{n+1} \\ &= (n+1)\left(H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - n + H_{n+1} \\ &= (n+2)H_{n+1} - (n+1) \end{aligned}$$

## أجوبة تمرينات رقم ٢

### أولا: المجموعات

**٢-١**

أ) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$ ب) $\{2, 4\}$

ت) $\{7, 10\}$ ث) $\{2, 3, 5\}$

ج) $\{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$ ح) $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

خ) $\phi$ د) $A$

ذ) $\phi$ ر) $U$

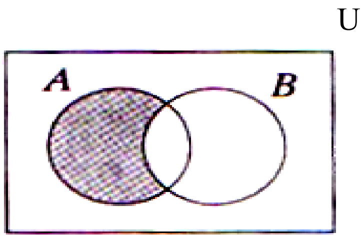
ز) $B$ س) $\{1, 4\}$

ش) $\{6, 8\}$ ص) $\{1\}$

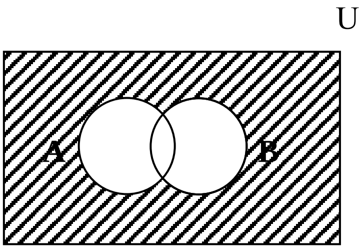
ض) $\{2,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ط) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$

**٢-٢**

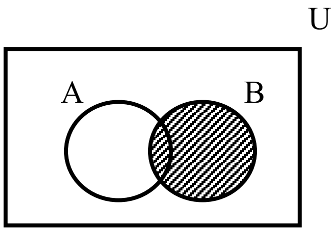
أ)



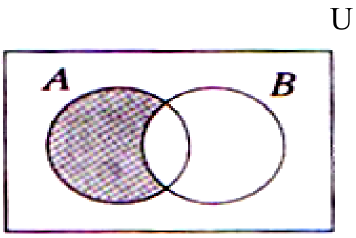

ب)



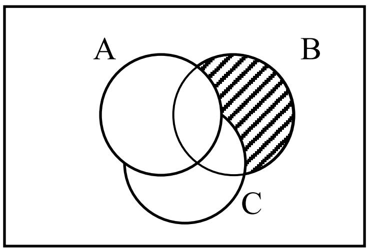

ج)



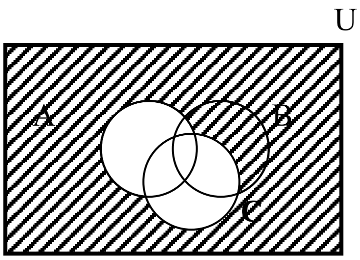

د)

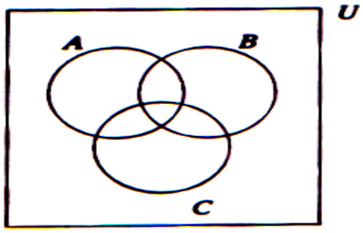


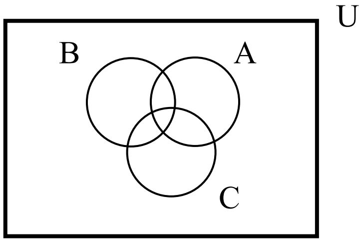

هـ)




و)



ز) 


ح) 


٢–٣ أ) 10 ب) 32 ج) 105

د) 54 هـ) 51

٢–٤ 4

٢–٥ أ) $\{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

ب) $\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

ج) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

د) $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

٢–٦ أ) $\{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta)\}$

ب) $\{(1, a, a), (2, a, a)\}$

ج) $\{(1,1,1), (1,2,1), (2,1,1), (2,2,1), (1,1,2), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,2)\}$

د) $\{(a,1,a,\alpha), (a,2,a,\alpha), (a,1,a,\beta), (a,2,a,\beta)\}$

٢–٧ أ) $\{\{1\}\}$

ب) $\{1, 2\}$

$\{1\}, \{2\}$

ج) $\{a, b, c\}$

$\{a, b\}, \{c\}$

$\{a, c\}, \{b\}$

$\{b, c\}, \{a\}$

$\{a\}, \{b\}, \{c\}$

د) $\{\{a, b, c, d\}\}, \{\{a, b, c\}, \{d\}\},$
$\{\{a, b, d\}, \{c\}\}, \{\{a, c, d\}, \{b\}\}, \{\{b, c, d\}, \{a\}\},$
$\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}, \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\},$
$\{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\},$
$\{\{b, c\}, \{a\}, \{d\}\}, \{\{b, d\}, \{a\}, \{c\}\}, \{\{c, d\}, \{a\}, \{b\}\},$
$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}, \{\{a, c\}, \{b, d\}\}, \{\{a, d\}, \{b, c\}\},$
$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

٢–٨ أ) true ب) false ج) true د) true

٢–٩ أ) **متساويتان** ب) **متساويتان** ج) **متساويتان**
د) **متساويتان** هـ) **غير متساويتين**

٢–١٠ أ) **العناصر:** $\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}$
**جميعها مجموعات جزئية صحيحة ما عدا** $\{a, b\}$.
ب) $\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\},$
$\{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\},$
$\{a,b,c,d\}$
ج) **عدد العناصر :** $2^{10} = 1024$
**عدد المجموعات الجزئية الصحيحة:** $2^{10} - 1 = 1023$
د) $2^n - 1$

٢–١١ $X = Y$

٢–١٢ أ) **خاطئة** (false): $X = \{1,2\}, Y = \{2,3\}$
ب) **صحيحة** (true). ج) **صحيحة.**
د) **خاطئة:** $X = \{1,2,3\}, \quad Y = \{2\}, \quad Z = \{3\}$
هـ) **خاطئة:** $X = \{1,2\}, \quad Y = \{2,3\}, \quad U = \{1,2,3\}$
و) **خاطئة:** $U = \{1,2,3,4,5\}, \quad X = \{2,3\}, \quad Y = \{3,4\}$
ز) **خاطئة:** $X = \{1\}, \quad Y = \{1,2\}$

ح) صحيحة.

ط) خاطئة: $U = \{1,2\}, \quad X = \{1\}, \quad Y = \{2\}$

ي) صحيحة.

ك) خاطئة: $X = \{1,2\}, \quad Y = \{1\}, \quad Z = \{2\}$

ل) خاطئة: $X = \{1,2\}, \quad Y = \{1,3\}, \quad Z = \{1,4\}$

م) صحيحة.

**٢-١٣ البرهان بالتناقض:** نفرض أن العبارة خاطئة. معنى ذلك أنه يوجد عنصر $x$ حيث $x \in \phi$ ولكن $x \notin X$. ولكن هذا تناقض لأن المجموعة الخالية $\phi$ لا تحتوي على أي عنصر. ولذلك $\phi \subseteq X$.

٢-١٤ أ) $A \subseteq B$ ب) $B \subseteq A$

ج) $A = U$ د) $B \subseteq A$

٢-١٥ أ) $\{1, 4, 5\}$

ب) الفارق المتماثل بين مجموعتين يتكون من العناصر التي تنتمي إلى إحدى المجموعتين ولكن ليس إلى كليهما.

ج) $A\Delta A = \phi, A\Delta\overline{A} = U, U\Delta A = \overline{A}, \phi\Delta A = A$

د) العبارة صحيحة. ولإثبات أن $A = B$ نثبت أولا أن $A \subseteq B$. نفرض أن $x \in A$. ولإثبات أن $x \in B$ ندرس الحالتين:

i) $x \in C$. وحينئذ تكون $x \notin A\Delta C$. ولذلك تكون $x \notin B\Delta C$. وبناءً عليه تكون $x \in B$ [لأنه إذا كانت $x \notin B$ فإن $x \in B\Delta C$]

ii) $x \notin C$. وحينئذ تكون $x \in A\Delta C$. ولذلك تكون $x \in B\Delta C$. وبناءً عليه تكون $x \in BUC$ وبالتالي تكون $x \in B$.

٢-١٦ المجموع $|A|+|B|$ يحسب عدد العناصر الموجودة في A والعناصر الموجودة في B ، ولذلك فإن عدد العناصر الموجودة في $A \cap B$ (أي الموجودة في كل من A, B) يحسب مرتين.

٢-١٧
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

٢-١٨ مركز (center) الدائرة C.

٢-١٩ P هي مجموعة الأعداد الأولية (set of primes).

**ثانيا: المتتاليات / المتتابعات**

٢-٢١ أ) c ب) c ج) cddcdc

٢-٢٢ -أ) i) 5 ii) 13 iii) 199 iv) 4153

ب) i) 9 ii) 45

ج) i) 15 ii) 3465

د) $s_n = 2(n+1) - 1$

هـ) نعم و) لا

٢-٢٣ -أ) i) 8 ii) 26

ب) i) 41 ii) 8

ج) نعم د) لا

٢-٢٤ -أ) i) 12 ii) 23 iii) 7 iv) 46

ب) i) 1 ii) 3 iii) 3 iv) 21

ج) نعم د) لا

٢-٢٥ -أ) i) 2 ii) 5

ب) إذا كانت n عددا زوجيا ... $n/2$

إذا كانت n عددا فرديا .... $(n-1)/2-n$

$$c_n = \begin{cases} n/2 \\ (n-1)/2-n \end{cases}$$

ج) n عدد زوجي $(-1)^{n/2} \quad n!$

n عدد فردي $(-1)^{(n+1)/2} \quad n!$

$$c_n = \begin{cases} (-1)^{n/2} \quad n! \\ (-1)^{(n+1)/2} \quad n! \end{cases}$$

د) لا هـ) نعم

٢-٢٦ -أ) i) 9 ii) 30

ب) $3n$ ج) $3^n$ د) نعم هـ) لا

٢-٢٧ -أ) i) 15 ii) 155

ب) $2n + 3(n-1)\, n/2$

ج) نعم د) لا

٢-٢٨ -أ) i) ¾ ii) 10/11

ب) $1 - 1/(n+1)$

ج) $1/[(n+1)\,(n!)^2]$

د) لا هـ) نعم

٢-٢٩ $3^n\ n!$

٢-٣٠ أ) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

ب) $1, 5, 9, 13, 17, 21, 25$

ج) $n_k = 2k - 1$

د) $s_{n_k} = 4k - 3$

٢-٣١-أ) $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7$

ب) $2^1, 2^2, 2^4, 2^7, 2^{11}, 2^{16}, 2^{22}$

ج) $n_k = \frac{k(k-1)+2}{2}$

د) $t_{n_k} = 2^{n_k} = 2^{[k(k-1)+2]/2}$

٢-٣٢-أ) 88 ب) 1140 ج) 48 د) 3168

٢-٣٣-أ) iv) -476 iii) -88 ii) -14 i) -1

ب) $3.2^p - 4.5^p$

ج) $3.2^{n-1} - 4.5^{n-1}$

د) $3.2^{n-2} - 4.5^{n-2}$

هـ)

$$\begin{aligned}
&7r_{n-1} - 10r_{n-2} \\
&= 7(3.2^{n-1} - 4.5^{n-1}) - 10(3.2^{n-2} - 4.5^{n-2}) \\
&= 3(7.2^{n-1} - 10.2^{n-2}) - 4(7.5^{n-1} - 10.5^{n-2}) \\
&= 3(\tfrac{7}{2}2^n - \tfrac{10}{4}2^n) - 4(\tfrac{7}{5}5^n - \tfrac{10}{25}5^n) \\
&= 3.2^n - 4.5^n = r_n
\end{aligned}$$

٢-٣٤-أ) iv) 135 iii) 36 ii) 9 i) 2

ب) $(2+i)3^i$

ج) $(1+n)3^{n-1}$

د) $n.3^{n-2}$

هـ) $6z_{n-1}-9z_{n-2}=6(1+n)3^{n-1}-9(n3^{n-2})=2(1+n)3^n-n3^n$

$$= 3^n[2(1+n)-n] = (2+n)3^n = z_n$$

٢-٣٥ $b_1 = 2, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 5,$

$$b_4 = 8, \quad b_5 = 12, \quad b_6 = 257$$

٢-٣٦ $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2 r^{n-k-1}$

٢-٣٧ $\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$

٢-٣٨ نفرض $s_0 = 0$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n}(s_k - s_{k-1})b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n} s_k b_{k+1} + s_n b_{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1}$$

**٢-٣٩ المجموع الموجود في الطرف الأيسر من المعادلة هو مجموع المنظومة التالية صفا صفا:**

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ & & & & a_{nn} \end{matrix}$$

**والمجموع الموجود في الطرف الأيمن هو مجموع المنظومة نفسها عموداً عموداً ، وبالتالي فالمجموعان متساويان.**

٢-٤٠ أ) baabcaaba ب) caababaab

ج) baabbaab د) caabacaaba

هـ) 9 و) 9 ز) 8 ح) 10

ط) baab ي) caaba

ك) baabcaababbab ل) caabacaababbabbaab

٢-٤١ -أ) 00, 01, 10, 11

ب) $\lambda$, 0, 1, 00, 01, 10, 11

ج) 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

د) 000, 010, 001, 011, 100, 110, 101, 111, 00, 01, 11, 10, 0, 1, $\lambda$

٢-٤٢ -أ) $\lambda$, b, a, c, ba, ab, bc, bab, abc, babc

ب) $\lambda$, a, b, aa, ab, ba, bb, aab, aba, baa, abb, aaba, abaa, baab, aabb, aabaa, abaab, baabb, aabaab, abaabb, aabaabb

٢-٤٣ -أ) نفرض $\alpha = \lambda$.

$\Rightarrow \alpha \in L \quad \Rightarrow \quad ab = a\alpha b \in L$ [بتطبيق (i)]

$\beta = ab \in L \quad \Rightarrow \quad aabb = a\beta b \in L$ [بتطبيق (i)]

$\gamma = aabb \in L \quad \Rightarrow \quad aaabbb = a\gamma b \in L$ [بتطبيق (i)]

ب) نفرض $\alpha = \lambda$.

$\Rightarrow a\alpha b = ab \in L$ [بتطبيق (i)]

$\& \; b\alpha a = ba \in L$ [بتطبيق (i)]

وبفرض $\alpha = ba, \quad \beta = ab$

$\Rightarrow \alpha\beta = baab \in L$ [بتطبيق (ii)]

وأخيرا بفرض $\alpha = baab, \quad \beta = ab$

$\Rightarrow \alpha\beta = baabab \in L$ [بتطبيق (ii)]

ج) **الجزء د) يثبت أنه إذا كان $\alpha \in L$ ، فإن $\alpha$ تحتوي على عددين متساويين من الرمزين a, b. وحيث أن تكرار الرمز a أكثر من تكرار الرمز b في السلسلة aab فهي ليست في L.**

د) **نفرض أن طول السلسلة $\alpha$ يساوي n. وسنستخدم الاستقراء القوي على الطول n لإثبات أنه إذا كانت $\alpha \in L$ فإن $\alpha$ تحتوي على عددين متساويين من الرمزين a, b**

**الخطوة الأساسية: $n = 0$. أي أن $\alpha$ هي السلسلة الخاوية ، وهي تحتوي على عددين متساويين من الرمزين a, b.**

**الخطوة الاستقرائية: نفرض أن أي سلسلة في L طولها $k < n$ تحتوي على عددين متساويين من الرمزين a, b. والآن علينا أن نثبت أن أي سلسلة في L طولها n يجب أن تحتوي على عددين متساويين من a, b. نفرض أن $\alpha \in L$ وأن $|\alpha| = n > 0$.**

**والآن $\alpha$ تنتمي إلى L إما بسبب القاعدة (i) أو القاعدة (ii).**

(*) **نفرض أن $\alpha \in L$ بسبب القاعدة (i). في هذه الحالة:**

$\alpha = a\beta b$ **أو** $\alpha = b\beta a$ **، حيث** $\beta \in L$.

**وحيث أن $|\beta| < n$ ، فبالفرض الاستقرائي تحتوي $\beta$ على عددين متساويين من a, b. ونظراً لأن $\alpha = a\beta b$ أو $\alpha = b\beta a$ ، فإن $\alpha$ أيضا ستحتوي على عددين متساويين من a, b.**

(*) **وإذا فرضنا أن $\alpha \in L$ بسبب القاعدة (ii). في هذه الحالة:**

$\alpha = \beta\gamma$ حيث $\beta \in L$ أو $\gamma \in L$. حيث أن $|\beta| < n$ و $|\gamma| < n$ فبالفرض الاستقرائي تحتوي كل من $\beta, \gamma$ على عددين متساويين من a, b. ونظراً لأن $\alpha = \beta\gamma$ فإن $\alpha$ أيضا ستحتوي على عددين متساويين من a, b. وهكذا يكتمل البرهان بالاستقراء.

٢–٤٤ أ) 14 ب) 18 ج) 192 د) $a_{n_k} = 4k$

٢–٤٥ $\sum_{k=-1}^{n-2} (n-k-2)r^{k+2}$

٢–٤٦ –أ) $b_5 = 35, \quad b_{10} = 120$

ب) $(n+1)^2 - 1$

ج) نعم د) لا

٢–٤٧ –أ) ccddccccdd

ب) cccddccddc

ج) 5

د) 20

**ثالثا: العلاقات**

٢–٤٨ –أ) {(8840, plane), (9921, tank), (452, bomb), (2207, rocket)}

ب) {(a, 3), (b, 1), (b, 4), (c, 1)}

ج) {(Khadeeja, Math), (Maryam, Physics), (Aisha, Econ)}

د) {(a, a), (b, b)}

٢–٤٩ –أ)

| | |
|---|---|
| a | 6 |
| b | 2 |
| a | 1 |
| c | 1 |

ب)

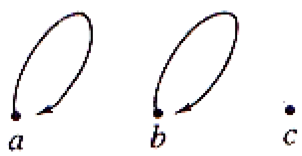
| | |
|---|---|
| Ahmed | Computer Sc |
| Aly | History |
| Othman | Math |
| Aly | PolySci |

ج)

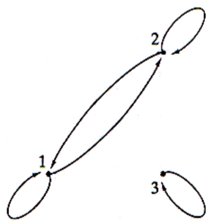
| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |

٢-٥٠

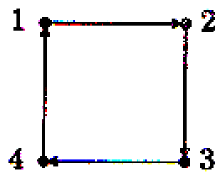
أ)



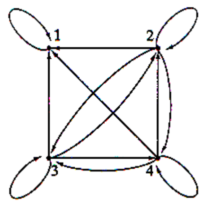

ب)




ج)




د)




٢-٥١ -أ) {(a, b), (a, c), (b, a), (b, d), (c, c), (c,d)}

ب) {(1, 1), (2,2), (3,3), (3,5), (4,3), (4,4), (5,5), (5,4)}

ج) $\phi$

د) {(b, c), (c, b), (d, d)}

٢-٥٢ -أ) **المجال:** {8840, 9921, 452, 2207}

**المدى:** {plane, tank, bomb, rocket}

ب) {(plane, 8840), (tank, 9921), (bomb, 452), (rocket, 2207)}

٢–٥٣ –أ) $\{(1,1), (1,4), (2,2), (2,5), (3,3), (4,1), (4,4), (5,2), (5,5)\}$

ب) $\{(1,1), (4,1), (2,2), (5,2), (3,3), (1,4), (4,4), (2,5), (5,5)\}$

ج) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

د) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

هـ) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

و) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

٢–٥٤

$$R = R^{-1} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),$$
$$(1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1)\}$$
$$\text{domain } R = \text{range } R = \text{domain } R^{-1}$$
$$= \text{range } R^{-1} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

٢–٥٥

$$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)$$
$$R^{-1} = \{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4)\}$$
$$\text{domain of } R = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$\text{range of } R = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$\text{domain of } R^{-1} = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$\text{range of } R^{-1} = \{1, 2, 3, 4\}$$

**٢–٥٦ متناظرة.**

**٢–٥٧ قطرية التناظر.**

**٢–٥٨ –أ) قطرية التناظر.**

**ب) قطرية التناظر ، متعدية.**

**ج) انعكاسية ، قطرية التناظر ، متعدية ، ترتيب جزئي.**

**د) انعكاسية ، متناظرة ، قطرية التناظر ، متعدية ، ترتيب جزئي.**

هـ) انعكاسية ، متناظرة ، متعدية.

٢–٥٩ انعكاسية ، قطرية التناظر ، متعدية ، ترتيب جزئي.

٢–٦٠ انعكاسية ، متناظرة.

٢–٦١ انعكاسية: نفرض أن $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$

ونظراً لأن $R_i$ انعكاسية: $x_1 R_1 x_1 \ \& \ x_2 R_2 x_2$

وبالتالي فإن: $(x_1, x_2) R (x_1, x_2) \quad \Rightarrow$

قطرية التناظر: نفرض أن

$$(x_1, x_2) R (x_1', x_2') \,\&\, (x_1, x_2) \neq (x_1', x_2')$$

وبالتالي فإن:

$x_1 R_1 x_1' \,\&\, x_2 R_2 x_2'$ وإما أن $x_1 \neq x_1'$ أو $x_2 \neq x_2'$.

يمكننا أن نفرض أن $x_1 \neq x_1'$. ونظرا لأن $R_1$ قطرية التناظر ، فلذلك $(x_1', x_1) \notin R$. وهكذا فإن $(x_1', x_2') \not R \, (x_1, x_2)$

وبالتالي نستنتج أن $R$ قطرية التناظر.

متعدية: يمكن إثبات هذه الخاصية بطريقة مماثلة لما سبق.

٢–٦٢ $R_1 \circ R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),4,2)\}$

$R_2 \circ R_1 = \{(1,1),(1,2),(3,4),(4,1),(4,2)\}$

٢–٦٣ –أ) $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,3), (2,1), (3,2)\}$

ب) $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,3)\}$

ج) $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,3)\}$

د) $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

هـ) $\{(1,2), (2,3), (1,3)\}$

٢-٦٤ –أ) **خاطئة. نفرض** $R = \{(1,2)\}, S = \{(2,3)\}$

ب) **صادقة.**

ج) **خاطئة. نفرض** $R = \{(2,3), (4,5)\},\ S = \{(1,2), (3,4)\}$

د) **صادقة** هـ) **صادقة** و) **صادقة** ز) **صادقة**

ح) **صادقة** ط) **صادقة** ي) **صادقة**

ك) **خاطئة. نفرض** $R = \{(2,3), (3,2)\},\ S = \{(1,2), (2,1)\}$

ل) **صادقة.**

م) **خاطئة. نفرض** $R = \{(1,2)\},\ S = \{(2,1)\}$

ن) **صادقة.**

س) **خاطئة. نفرض** $R = \{(2,3), (1,1)\},\ S = \{(1,2), (3,1)\}$

ع) **صادقة.**

٢-٦٥ –أ) $R$: **انعكاسية ، متناظرة ، ليست قطرية التناظر ، ليست متعدية ، ليست ترتيبا جزئيا.**

ب) $R$: **انعكاسية ، ليست متناظرة ، ليست قطرية التناظر ، متعدية ، ليست ترتيبا جزئيا.**

**لبيان أن** $R$ **ليست متناظرة نفرض أن** $A = \{1\}, B = \{1,2\}$**. ولبيان أن** $R$ **ليست قطرية التناظر ، نفرض أن** $A$ **هي مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ، و** $B$ **هي مجموعة جميع الأعداد النسبية** (all rational numbers).

٢-٦٦ **الخطأ في أنه لعنصر معين** $x \in X$ **قد لا يوجد عنصر** $y \in X$ **بحيث يكون** $(x, y) \in R$ **. مثلا إذا فرضنا أن**

$$X= \{1,2,3\},\quad R = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1)\},\quad x = 3$$

**فلا يوجد عنصر** $y \in X$ **بحيث أن** $(3, y) \in R$ .

٢-٦٧ –أ) **انعكاسية ، متناظرة ، متعدية.**

ب) متناظرة.

٢–٦٨ $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3)\}$

٢–٦٩ –أ) خاطئة. مثال مناقض:

$R = \{(1,1)\}$ على المجموعة $\{1, 2, 3\}$.

ب) صحيحة ج) صحيحة.

د) خاطئة. مثال مناقض:

$R = \{(1,1)\}$ على المجموعة $\{1, 2, 3\}$.

## رابعا: علاقات التكافؤ

٢–٧٠ –أ) علاقة تكافؤ.

$[1] = [3] = \{1,3\}$,
$[2] = \{2\}, \quad [4] = \{4\}, \quad [5] = \{5\}$

ب) ليست علاقة تكافؤ (ليست متعدية).

ج) ليست علاقة تكافؤ (ليست انعكاسية).

د) علاقة تكافؤ. طبقات التكافؤ:

$[1] = [3] = [5] = \{1,3,5\}$,
$[2] = \{2\}, \quad [4] = \{4\}$

هـ) علاقة تكافؤ. طبقات التكافؤ:

$[1] = [2] = [3] = [4] = [5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

و) علاقة تكافؤ. طبقات التكافؤ:

$[1] = [5] = \{1,5\}, [2] = \{2\}, [3] = \{3\}, [4] = \{4\}$

ز) ليست علاقة تكافؤ (ليست انعكاسية ، وليست متعدية).

ح) ليست علاقة تكافؤ (ليست انعكاسية ، وليست متناظرة ، وليست متعدية).

٢–٧١ –أ) علاقة تكافؤ.

ب) ليست علاقة تكافؤ (ليست متعدية).

ج) علاقة تكافؤ.

د) ليست علاقة تكافؤ (ليست انعكاسية ، وليست متناظرة).

هـ) علاقة تكافؤ.

و) علاقة تكافؤ.

٢–٧٢ –أ)

$\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$,
$[1] = [2] = \{1,2\}, [3] = [4] = \{3,4\}$

ب)

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (3,4), (4,3)\}$,
$[1] = \{1\}, [2] = \{2\}, [3] = [4] = \{3,4\}$

ج)

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}, [i] = \{i\}$ for $i = 1, ..., 4$

د)

$\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4)\}$,
$[1] = [2] = [3] = \{1,2,3\}, [4] = \{4\}$

هـ)

$\{(i, j) \mid i, j \in \{1,2,3,4\}\}$,
$[1] = [2] = [3] = [4] = \{1,2,3,4\}$

و)

$\{(1,1), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4), (3,3)\}$,
$[1] = \{1\}, [2] = [4] = \{2,4\}, [3] = \{3\}$

٢–٧٣ –أ) **انعكاسية:** ARA **لأن** $A \cup Y = A \cup Y$

**متناظرة: إذا كان** ARB **فإن** $A \cup Y = B \cup Y$. **والآن حيث أن** $B \cup Y = A \cup Y$ **فلذلك** BRA.

**متعدية: نفرض أن** ARB, BRC. **ولذلك** $A \cup Y = B \cup Y$ ، **وكذلك** $B \cup Y = C \cup Y$ **وبناءً عليه فإن** $A \cup Y = C \cup Y$. **وهكذا فإن** ARC.

ب) $\{1\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,3,4\}$

ج) **ثمانية. تتحدد أي طبقة تكافؤ بوجود** (presence) **أو غياب** (absence) **العناصر** 1, 2, 5.

٧٤-٢ ب) {Palestine, Iraq, Syria}, {Egypt, Algeria}, {Bosnia}

٧٥-٢ **حيث أن R علاقة تكافؤ ، فلذلك تكون R انعكاسية.**

**ولذلك فإن** $(x, x) \in R \quad \forall x \in X$

**وبناءً عليه فإن** $\text{domain } R = \text{range } R = X$

٧٦-٢ **إذا كانت R علاقة على X تحقق الخاصية المعطاة ، فإن**

$R = \{(x, y) \mid x \text{ and } y \text{ are in } X\}$

٧٧-٢ $R = \{(x, x) \mid x \in X\}$

٧٨-٢ $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$

٧٩-٢ **خمس علاقات تكافؤ تقابل التجزيئات (partitions):**

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{2,3\}\}, \{\{1,2\}, \{3\}\}, \{\{1,3\}, \{2\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}$

٨٠-٢ ب) $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (7,1), (8,1), (9,1), (10,1)$

٨١-٢ أ) **انعكاسية:** $(a, b)\ R\ (a, b) \quad \forall\, a, b \in X$

**نظراً لأن** $ab = ba \quad \forall\, a, b \in X$

**متناظرة: نفرض أن** $(a,b)\ R\ (c,d)$**. ولذلك** $ad = bc$**. وحيث أن** $cb = da$ **، فلذلك** $(c,d)\ R\ (a,b)$.

**متعدية: نفرض أن** $(a,b)\ R\ (c,d), (c,d)\ R\ (e,f)$

**ولذلك** $ad = bc, cf = de$**. وبناءً على ذلك فإن:**

$af = adf/d = bcf/d = bde/d = be$

**ولذلك فإن** $(a,b)\ R\ (e,f)$

ب)

$(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10),$

(2,1), (2,3), (2,5), (2,7), (2,9), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,7), (3,8), (3,10), (4,1), (4,3), (4,5), (4,7), (4,9), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (5,7), (5,8), (5,9), (6,1), (6,5), (6,7), (7,1), (7,2), (7,3), (7,4), (7,5), (7,6), (7,8), (7,9), (7,10), (8,1), (8,3), (8,5), (8,7), (8,9), (9,1), (9,2), (9,4), (9,5), (9,7), (9,8), (9,10), (10,1), (10,3), (10,7), (10,9)

ج) $(a,b)R(c,d) \text{ if and only if } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

**٢-٨٢ سنثبت هنا خاصية التناظر فقط. نفرض أن** $(a,b)\in R\cap R^{-1}$ **. ولذلك فـإن** $(a,b)\in R$ **، وبالتـالي فـإن** $(b,a)\in R^{-1}$ **. وكـذلك حيـث أن** $(a,b)\in R^{-1}$ **، فإن** $(b,a)\in R$ **. وهكذا نجد أن** $(b,a)\in R\cap R^{-1}$ **.**
**وبالتالي تكون** $R\cap R^{-1}$ **متناظرة.**

**٢-٨٣ -أ) نثبت هنا التناظر فقط. نفرض أن** $(x,y)\in R_1\cap R_2$

**أي أن:** $(x,y)\in R_1 \ \&\ (x,y)\in R_2$

**ونظراً لأن** $R_1$ **متناظرة وكذلك** $R_2$ **، فإن**

$$(y,x)\in R_1 \ \&\ (y,x)\in R_2$$

**وبالتالي فإن:** $(y,x)\in R_1\cap R_2$

**أي أن** $R_1\cap R_2$ **متناظرة.**

**ب)** $A$ **تكـون مـن طبقات تكـافؤ** $R_1\cap R_2$ **إذا وفقـط إذا كانـت هنـاك طبقـة تكـافؤ** $A_1$ **لـ** $R_1$ **وطبقـة تكـافؤ** $A_2$ **لـ** $R_2$ **بحيـث أن** $A=A_1\cap A_2$ **.**

**٢-٨٤** $R$ **انعكاسية لأنه:**

$$\forall x \quad x\in T \quad \text{for some} \quad T\in S$$

$R$ **متناظرة لأنه إذا فرضنا أن** $xRy$ **، فإن ذلك يعني**

$$\Rightarrow \quad x,y\in T \quad \text{for some} \ \ T\in S$$

$$\Rightarrow \quad y,x\in T \quad \Rightarrow \quad yRx$$

٢-٨٥ -ب) اسطوانة (cylinder).

٢-٨٧ -أ)

$$\rho(R_1) = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(3,4),(4,2)\}$$
$$\sigma(R_1) = \{(1,1),(2,1),(1,2),(3,4),(4,3),(4,2),(2,4)\}$$
$$\tau(R_1) = \{(1,1),(1,2),(3,4),(4,2),(3,2)\}$$
$$\tau(\sigma(\rho(R_1))) = \{(x,y) \mid x,y \in \{1,2,3,4\}\}$$

ب) نظراً لأن $(y,y) \in \{(x,x) \mid x \in X\} \ \forall\, y \in X$

فلذلك $(y,y) \in \rho(R) \ \forall\, y \in X$

ج) نفرض أن $(x,y) \in R \cup R^{-1}$

إذا كانت $(x,y) \in R$ فإن $(y,x) \in R^{-1}$

وبالتالي فإن $(y,x) \in R \cup R^{-1}$.

وإذا كانت $(x,y) \in R^{-1}$ فإن $(y,x) \in R$

وبالتالي فإن $(y,x) \in R \cup R^{-1}$.

أي أنه في أي من الحالتين إذا كانت $(x,y) \in R \cup R^{-1}$ فإن $(y,x) \in R \cup R^{-1}$ ، وبالتالي فإن $R \cup R^{-1}$ متناظرة.

د) نفرض أن $(x,y),(y,z) \in \tau(R)$

$$\Rightarrow \quad (x,y) \in R^m \quad \& \quad (y,z) \in R^n$$
$$\Rightarrow \quad (x,z) \in R^{m+n}.$$

ولذلك فإن $(x,z) \in \tau(R)$. أي أن $\tau(R)$ متعدية.

هـ) أولا: نفرض أن $R$ علاقة متعدية. إذا كانت

$(x,y) \in \tau(R) = \cup\{R^n\}$ فحينئذ يوجد

$x = x_0, \cdots, x_n = y \in X$ بحيث أن

$i = 1,2,\cdots,n$ ; $(x_{i-1},x_i) \in R$. وحيث أن $R$ علاقة متعدية ، فلذلك تكون $(x,y) \in R$. وهكذا نحصل على النتيجة

$\tau(R) \supseteq R$. وحيـث أن $R \subseteq \tau(R)$ دائمـا ، فلـذلك نصـل إلى النتيجة $R = \tau(R)$.

ثانيا: نفرض أن $\tau(R) = R$. وحيـث أن $\tau(R)$ علاقـة متعديـة – كما أثبتناها في د) – فلذلك تكون $R$ أيضا علاقة متعدية.

و) i) صادقة.

ii) خاطئة. نفرض $R_1 = \{(1,1),(1,2)\}, R_2 = \{(2,2),(2,1)\}$

iii) خاطئة. نفرض $X = \{1,2,3\}, R_1 = \{(1,2)\}, R_2 = \{(2,3)\}$

iv) خاطئة. نفرض $R_1 = \{(1,2),(2,3)\}, R_2 = \{(1,3),(3,4)\}$

v) صادقة　　vi) صادقة　　vii) صادقة.

٢–٨٨ نعم ، فهي انعكاسية ومتناظرة ومتعدية.

٢–٨٩ –أ) $[3] = \{3,4\}$

ب) هناك طبقتا تكافؤ.

٢–٩٠

$$\{(a, a), (b, b), (b, d), (b, e), (d, b), (d, d), (d, e), (e, b), (e, d), (e, e), (c, c)\}$$

٢–٩١ –أ) i) $R$ انعكاسية لأن أي سلسلة ثمانية الأرقام الثنائية تحتوي هي ونفسها على العدد نفسه من الأصفار.

ii) $R$ متناظرة لأنه إذا احتوت السلسلتان $s_1, s_2$ على العدد نفسه من الأصفار ، فإن السلسلتين $s_2, s_1$ تحتويان على العدد نفسه من الأصفار

iii) نفرض أن $s_1, s_2$ تحتويان على العدد نفسه من الأصفار.
ونفرض أن $s_2, s_3$ تحتويان على العدد نفسه من الأصفار.
وبناءً عليه فإن $s_1, s_3$ تحتويان على العدد نفسه من الأصفار.

أي أن R متعدية. وبالتالي تكون R علاقة تكافؤ.

ب) هناك تسع طبقات تكافؤ.

ج) 11111111, 01111111, 00111111, 00011111
00001111, 00000111, 00000011, 00000001
00000000

٢-٩٢ -أ) خاطئة. مثال مناقض: $R = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

R ترتيب جزئي وأيضا علاقة تكافؤ على $X = \{a, b, c\}$. لاحظ أن R متناظرة وكذلك قطرية التناظر (بالإضافة إلى كونها انعكاسية ومتعدية).

ب) صحيحة. R انعكاسية لأن $2x$ $(x+x=)$ تقبل القسمة على 2 (بدون باق). و R متناظرة لأنه إذا كانت 2 تَقْسِم $x+y$ فإن 2 تَقْسِم $y+x$. ولإثبات أن R متعدية: نفرض أن 2 تَقْسِم $x+y$ ، أي أن $x+y = 2k$ حيث k عدد صحيح. ونفرض أن 2 تَقْسِم $y+z$ ، أي أن $y+z=2n$ حيث n عدد صحيح. والآن بجمع المعادلتين الأخيرتين نرى أن

$$x + y + y + z = 2k + 2n$$

$$\Rightarrow \quad x + z = 2(k + n - y) = 2m$$

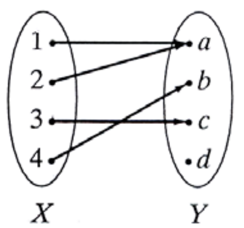
حيث m عدد صحيح ، أي أن 2 تَقْسِم $x+z$.

## خامسا: الدوال

٢-٩٣ -أ) دالة من X إلى Y.

domain = X, range = {a, b, c}

ليست واحدا لواحد ، وليست غامرة. ومخططها السهمي هو:

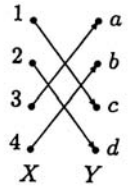



ب) ليست دالة (من X إلى Y).

ج) دالة من X إلى Y.

$$\text{domain} = X, \quad \text{range} = Y$$

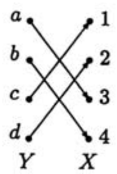
**والدالة واحد لواحد وكذلك غامرة. ومخططها السهمي هو:**




**والدالة العكسية هي:**

$$\{(c,1), (d,2), (a,3), (b,4)\}$$

**وبالنسبة لهذه الدالة العكسية:** $\text{domain} = Y, \quad \text{range} = X$ ، **ومخططها السهمي هو:**

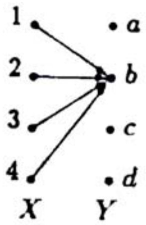



د) ليست دالة (من X إلى Y).

هـ) دالة من X إلى Y.

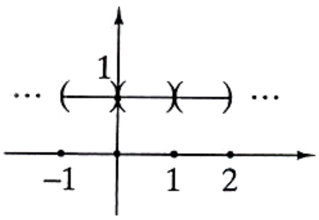
$$\text{domain} = X, \quad \text{range} = \{b\}$$

**ومخططها السهمي هو:**

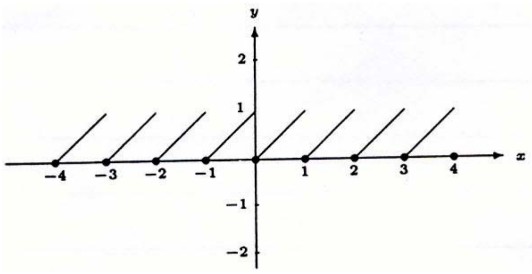



**والدالة ليست واحدا لواحد وليست غامرة.**

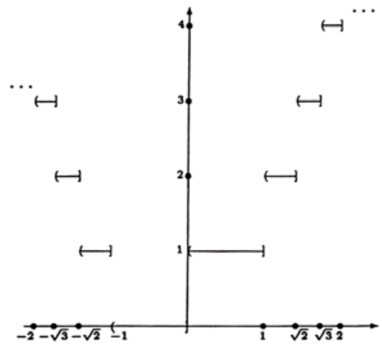
٢-٩٤ –أ)



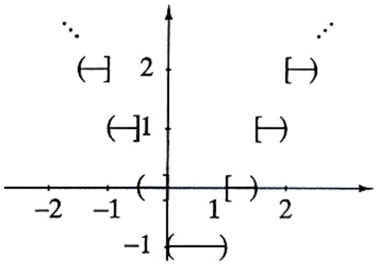
ب)




ج)



د)




٢-٩٥ –أ) f واحد لواحد ، وكذلك غامرة.

ب) ليست واحدا لواحد: f(4/3) = f(-2/3)

ليست غامرة: $f(x) \neq 0$ لأي عدد حقيقي x.

ج) ليست واحدا لواحد: $\sin 0 = \sin 2\pi$

ليست غامرة: $\sin x \neq 2$ لأي عدد حقيقي x.

د) f واحد لواحد وكذلك غامرة.

هـ) f واحد لواحد.

ليست غامرة: $f(x) \neq -2$ لأي عدد حقيقي x.

و) ليست واحدا لواحد: لاحظ أن $f(x) = f(1/x)$ ، وبالتالي فإن أي قيمة للعدد الحقيقي x (حيث $x \neq 0,\ x \neq 1$ ) يمكن استخدامها هي و $1/x$ لإعطاء مثال مناقض لبيان أن f ليست واحدا لواحد.

ليست غامرة: $f(x) \neq 1$ لأي عدد حقيقي x.

[لاحظ أن $-1/2 \leq f(x) \leq 1/2$ لجميع الأعداد الحقيقية x].

٢-٩٦ -أ) $f = \{(1, b), (3, a), (2, c)\}$

من $X = \{1, 2, 3\}$ إلى $Y = \{a, b, c, d\}$ .

ب) $f = \{(a, y), (b, y)\}$

من $X = \{a, b\}$ إلى $Y = \{y\}$ .

ج) $f = \{(1, 1), (2, 1)\}$

من $\{1, 2\}$ إلى $\{1, 2\}$ .

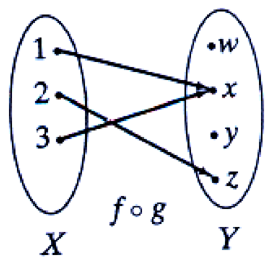
٢-٩٧

أ) $f^{-1}(y) = (y-2)/4$ ب) $f^{-1}(y) = \log_3 y$

ج) $f^{-1}(y) = 2^{y/3}$ د) $f^{-1}(y) = 1/(y-3)$

هـ) $f^{-1}(y) = \left(\frac{y+5}{4}\right)^{1/3}$ و) $f^{-1}(y) = [\log_2(y-6)+1]/7$

٢-٩٨ $f \circ g = \{(1, x), (2, z), (3, x)\}$



٢-٩٩ - أ) $f(f(n))=4n+3, g(g(n))=9n-4,\ f(g(n))=6n-1,$
$g(f(n))=6n+2$

ب)

$$f\circ f(x)=n^4,\ g\circ g(x)=2^{2^n},\ f\circ g(x)=2^{2n},\ g\circ f(x)=2^{n^2}$$

ج)

$$f\circ f(x)=2\lfloor 2x\rfloor,\ g\circ g(x)=x^4, f\circ g(x)=\lfloor 2x^2\rfloor, g\circ f(x)=\lfloor 2x\rfloor^2$$

٢-١٠٠-أ) نفرض $g(x)=\log_2 x,\quad h(x)=x^2+2$

$$\Rightarrow\quad f(x)=(g\circ h)(x)$$

ب) $g(x)=1/x, h(x)=2x, w(x)=x^2, g\circ h\circ w(x)=f(x)$

ج) $g(x)=2x, h(x)=\sin x, f(x)=h\circ g(x)$

د) $g(x)=2x, h(x)=\sin x, f(x)=(g\circ h)(x).$

هـ) $g(x)=x^4, h(x)=3+x, w(x)=\sin x, g\circ h\circ w(x)=f(x)$

و) $g(x)=1/x^3, h(x)=6x, t(x)=\cos x, f(x)=g\circ t\circ h(x)$

٢-١٠١

$$f=\{(-5,25),(-4,16),(-3,9),(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25)\}$$

f ليست واحدا لواحد وليست غامرة .

٢-١٠٢ عدد الدوال: 4

الدوال واحد لواحد: $\{(1,a),(2,b)\},\{(1,b),2,a)\}$

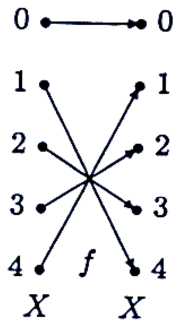
وفي هذه الحالة الدوال الغامرة هي نفسها الدوال واحد لواحد .

٢-١٠٣-أ) $f \circ f = \{(a,a), (b,b), (c,a)\}$

$f \circ f \circ f = \{(a,b), (b,a), (c,b)\}$

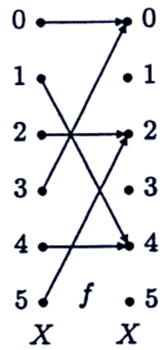
ب) $f^9 = f, f^{623} = f$

٢-١٠٤-أ) $f = \{(0,0), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$




f واحد لواحد وغامرة .

ب) $f = \{(0,0), (1,4), (2,2), (3,0), (4,4), (5,2)\}$




f ليست واحدا لواحد وليست غامرة .

ج ) القاسم المشترك الأعظم g c d (greatest common divisor) للعددين m , n يجب أن يساوي ١ .

٢-١٠٦ 4

٢-١٠٧الاصطلاح a : b في الحل التالي يعني أن نقوم بتخزين (storing) وحدة البيانات / العنصر a ( item) في الخلية b ( cell ) .

أ) 53:9, 13:2, 281:6, 743:7, 377:3, 20:10, 10:0, 796:4

ب) 714:0, 631:2, 26:9, 373:16, 775:10, 906:5, 509:1,
2032:11, 42:8, 4:4, 136:3, 1028:12

ج) 53:4, 13:5, 281:3, 743:6, 377:9, 20:7, 10:1, 796:8

د) 714:0, 631:6, 26:5, 373:1, 775:8, 906:13,
509:2, 2032:7, 42:4, 4:3, 136:9, 1028:10

**٢-١٠٨-أ) أثناء عملية البحث (search) إذا أوقفنا البحث عند خلية فارغة (an empty cell) فقد لا نجد العنصر حتى لو كان موجودا. فربما تكون الخلية فارغة بسبب أن عنصرا ما قد تم حذفه. وأحد الحلول لهذه المشكلة أن نميِّز / نعلِّم (mark) الخلايا المحذوفة (deleted cells) ، ونعتبرها غير خالية (non empty) أثناء أي عملية بحث.**

**ب) لا لن تنشأ أي مشكلة لأنه إذا كان عنصر البيانات (data item) موجودا (present) فسنعثر عليه ( found) قبل أن نقابل خلية فارغة.**

**٢-١٠٩-أ) خاطئة . نفرض** $g = \{(a,x),(b,x)\}, f = \{(x,1)\}$

**ب ) صادقة .** **ج ) صادقة .**

**د ) خاطئة . نفرض** $f = \{(a,z),(b,z)\}, g = \{(1,a)\}$

**هـ ) صادقة .** **و ) صادقة .**

**٢-١١٠-أ)** $g(S)=\{a\}, g(T)=\{a,c\}, g^{-1}(U)=\{1\},$
$g^{-1}(V)=\{1, 2, 3\}$

**ب) نفرض أن f ليست واحدا لواحد . معنى هذا أنه يوجد** $x, y$ **حيث** $f(x)=f(y)$ **ولكن** $x \neq y$ **. اجعل** $A=\{x\}, B=\{y\}$ **. افرض أن** f **واحد لواحد . نفرض** $y \in f(A \cap B)$ .

$$\Rightarrow \quad y = f(x) \text{ for some } x \in A \cap B$$
$$\Rightarrow \quad y \in f(A) \cap f(B)$$

**والآن نفرض أن** $y \in f(A) \cap f(B)$

$$\Rightarrow \quad y = f(a) = f(b) \quad \text{for some} \quad a \in A, b \in B$$

**وحيث أن** $f$ **واحد لواحد ، فلذلك** $a = b$ ، **وبناءً عليه تكون**

$$y \in f(A \cap B)$$

**ج ) انعكاسية: لكل** $x \in X$ **– بتعريف الدالة –** $f(x)$ **مُعَرَّفه.**

**وحيث أن** $f(x) = f(x)$ ، **فلذلك** $xRx \quad \forall x \in X$

**متناظرة: نفرض أن** $xRy$. **ولذلك** $f(x) = f(y)$.

**وحيث أن** $f(y) = f(x)$ ، **فلذلك** $yRx$.

**متعدية : نفرض أن** $xRy \, , \, yRz$ ، **ولذلك**

$$f(x) = f(y) \, , \, f(y) = f(z)$$

**ولذلك** , $f(x) = f(z)$ ، **وبالتالي** $xRz$

**د) إذا كانت** $x \in X$ **فإن** $x \in f^{-1}(f(\{x\}))$

**وبالتالي** $U\{T | T \in S\} = X$

**نفرض أن**

$$a \in f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{z\}) \;\; \text{for some} \;\; y, z \in Y$$

$$\Rightarrow \quad f(a) = y, \quad f(a) = z.$$
$$\Rightarrow \quad y = z$$

**ولذلك فإن** $S$ **تجزئة لـ** $X$.

**وأما علاقة التكافؤ التي تولِّد هذه التجزئة فهي معطاة في الجزء ج ) من السؤال.**

**٢–١١١ عندما تكون** $x , y$ **في طبقة التكافؤ نفسها .**

**٢–١١٢ نفرض أن** $[x] = [y]$. **وعندئذ** $x \, R \, y$ . **ولذلك** $g(x) = g(y)$.

٢-١١٣ ملاحظة : الافتراض

" إذا كانت $g$ واحدا لواحد فإن $f \circ g$ تكون واحدا لواحد " يعني (implies) أن $f$ واحد لواحد .

نفرض أن $f$ ليست واحدا لواحد . معنى هذا أنه يوجد عنصران مختلفان $x_1, x_2 \in X$ حيث $f(x_1) = f(x_2)$.

نفرض أن $A = \{1,2\}$ . ونفرض أن $g = \{(1, x_1), (2, x_2)\}$ .

نلاحظ أن $g$ واحد لواحد ولكن $f \circ g$ ليست واحدا لواحد. وهذا تناقض.

٢-١١٤ (i) نفرض أن $f$ دالة ( غامرة ) على $Y$ (onto). ونفرض أن $g$ دالة من $Y$ على $Z$ (onto). يجب أن نثبت أن $g \circ f$ دالة على $z$ (onto) . نفرض أن $z \in Z$ . حيث أن $g$ دالة على $Z$ فلذلك يوجد $y \in Y$ حيث $g(y) = z$ . وحيث أن $f$ دالة على $Y$ فلذلك يوجد $x \in X$ حيث $f(x) = y$ . والآن $g \circ f(x) = z$ . ولذلك $g \circ f$ دالة ( غامرة ) على $Z$ (onto) .

(ii) الآن نفرض انه كلما كانت $g$ دالة من $Y$ ( غامرة ) على $Z$ (onto) فإن $g \circ f$ تكون ( غامرة ) على $Z$ (onto) . ونفرض أن $f$ ليست غامرة (onto) على $Y$ ( أي سنثبت المطلوب بالتناقض ). معنى ذلك أنه توجد $y_0 \in Y$ بحيث أنه لا توجد أي $x \in X$ تحقق لنا العلاقة $f(x) = y_0$ . نفرض أن $Z = \{0, 1\}$ ، ونعرّف $g$ من $Y$ إلى $Z$ كما يلي :

$$g(y_0) = 1, \quad g(y) = 0 \quad \text{if} \quad y \neq y_0$$

نلاحظ أن $g$ دالة غامرة على $Z$ ، ولكن $g \circ f$ ليست غامرة على $Z$ .

٢-١١٥ (أ)

If $x \in X \cap Y$, $C_{X \cap Y}(x) = 1 = 1 \times 1 = C_X(x) C_Y(x)$.

If $x \notin X \cap Y$, then $C_{X \cap Y}(x) = 0$.

وحيث أنه في هذه الحالة إما أن $x \notin X$ أو $x \notin Y$ فمعنى ذلك أنه إما أن $C_X(x) = 0$ أو $C_Y(x) = 0$ وبالتالي فإن

$$C_X(x)\, C_Y(x) = 0 = C_{X \cap Y}(x)$$

ب)

i) If $x \in X - Y$, then

$$C_{X \cup Y}(x) = 1 = 1 + 0 - 1 \times 0$$
$$= C_X(x) + C_Y(x) - C_X(x)\, C_Y(x)$$

وبالمثل :

ii) If $x \in Y - X$ تتحقق المعادلة المطلوبة

iii) If $x \in X \cap Y$, then

$$C_{X \cup Y}(x) = 1 = 1 + 1 - 1 \times 1$$
$$= C_X(x) + C_Y(x) - C_X(x) C_Y(x)$$

iv) If $x \notin X \cup Y$, then

$$C_{X \cup Y}(x) = 0 = 0 + 0 - 0.0$$
$$= C_X(x) + C_Y(x) - C_X(x)\, C_Y(x).$$

أي أن المعادلة المطلوبة تتحقق لجميع العناصر $x \in U$

ج)

i) If $x \in X$, then $x \notin \overline{X}$;

$$\Rightarrow \quad C_{\overline{X}}(x) = 0 = 1 - 1 = 1 - C_X(x)$$

ii) If $x \notin X$, then $x \in \overline{X}$;

$$\Rightarrow \quad C_{\overline{X}}(x) = 1 = 1 - 0 = 1 - C_X(x)$$

د)

i) If $x \in X - Y$, then

$$C_{X-Y}(x) = 1 = 1.\ [1 - 0] = C_X(x)[1 - C_Y(x)].$$

ii) If $x \notin X - Y$, then

إما أن $x \notin X$ أو أن $x \in Y$

a) If $x \notin X$, then

$$C_{X-Y}(x) = 0 = 0 \cdot [1 - C_Y(x)] = C_X(x)[1 - C_Y(x)].$$

b) If $x \in Y$, then

$$C_{X-Y}(x) = 0 = C_X(x)[1-1] = C_X(x)[1 - C_Y(x)].$$

أي أن المعادلة المطلوبة تتحقق لجميع العناصر $x \in U$.

هـ) إذا كانت $C_X(x) = 0$ فواضح أن المتباينة المطلوبة متحققة .

وإذا كانت $C_X(x) = 1$ فمعنى هذا أن $x \in X$ . وحيث أن $X \subseteq Y$ فلذلك $x \in Y$ . وبالتالي فإن $C_Y(x) = 1$ أيضا ، ونرى أن المتباينة المطلوبة متحققة .

و) من الجزء ب ) من السؤال نستنتج أن :

$$C_{X \cup Y}(x) = C_X(x) + C_Y(x) \qquad \forall\, x \in U.$$

if and only if

$$C_X(x)\, C_Y(x) = 0 \qquad \forall\, x \in U.$$

ومن الجزء أ ) من السؤال نستنتج أن هذه المعادلة الأخيرة تتحقق إذا وفقط إذا (if and only if)

$$C_{X \cap Y}(x) = 0 \qquad \forall\, x \in U$$

وبناء على التعريف (definition) فإن هنا المعادلة الأخيرة بدورها تتحقق إذا وفقط إذا (if and only if) :

$$x \notin X \cap Y \qquad \forall x \in U$$

أي

if and only if $X \cap Y = \phi$

ز) $C_{X \Delta Y}(x) = C_X(x) + C_Y(x) - 2C_X(x)C_Y(x)$

ح) الدالة f تعتبر غامرة (onto) من التعريف. نفرض أن f(x) = f(y). وبالتالي فإن $\forall x \in U \quad C_X(x)=C_Y(x)$ .

ونفرض أن $x \in X$ . وبالتالي فإن $C_X(x)=1$ . وهكذا فإن $C_Y(x)=1$ . ولذلك فإن $x \in Y$ . معنى هذا أن $X \subseteq Y$ . وبالمثل يمكننا استنتاج أن $Y \subseteq X$ . ولذلك فإن $X=Y$ والدالة f واحد لواحد .

ط) نفرض أن $f = C_Y$ . طبقتا التكافؤ هما Y و $\overline{Y}$ .

٢-١١٦- أ) (i) أي مجموعة (set) تكون مكافئة لنفسها (equiv. to itself) وذلك بدالة التطابق (identity function) .

(ii) إذا كانت x مكافئة لـ Y ، فهناك دالة f واحد لواحد وغامرة من X إلى Y $(f: X \to Y)$ . والآن $f^{-1}$ دالة واحد لواحد وغامرة من Y إلى X $(f^{-1}: Y \to X)$ .

(iii) إذا كانت x مكافئة لـ Y ، فهناك دالة $f: X \to Y$ واحد لواحد وغامرة . وإذا كانت Y مكافئة لـ Z ، فهناك دالة $g: Y \to Z$ واحد لواحد وغامرة . والآن $g \circ f$ دالة واحد لواحد وغامرة من X إلى Z $(g \circ f: X \to Z)$.

ب) المجموعتان X, Y لهما العدد نفسه من العناصر.

ج) اجعل f (x) = 2x.

د) نفرض أن المجموعة X مكافئة للمجموعة P(x). معنى ذلك أنه توجد دالة f واحد لواحد وغامرة من X إلى P(x) .

نفرض أن

$$Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$$

$$\Rightarrow \quad f(y) = Y \quad \text{for some} \quad y \in X$$

ثم ادرس الاحتمالين : $y \in Y$ و $y \notin Y$ .

هـ) i) نفرض أنه توجد دالة $f$ واحد لواحد من $X$ إلى $Y$. ونفرض أن $R$ هو مدى $f$، واختر $a \in X$. إذا كانت $y \in R$، فاجعل $g(y) = f^{-1}(y)$. وإذا كانت $y \in Y - R$ فاجعل $g(y) = a$. نلاحظ أن $g$ دالة من $Y$ غامرة على $X$ (onto).
ii) نفرض أنه توجد دالة $g$ من $Y$ غامرة على $X$. لكل $x \in X$ اختر عنصرا واحدا $y \in Y$ حيث $g(y) = x$، وعَرِّف $f(x) = y$.
نلاحظ أن $f$ دالة واحد لواحد من $X$ إلى $Y$.

٢-١١٧-أ) $f$ مؤثر ثنائي تبادلي.
ب) $f$ ليست مؤثرا ثنائيا لأن $X$ لا تحتوي (contain) على مدى $f$.
ج) $f$ مؤثر ثنائي غير تبادلي.
د) $f$ ليست مؤثرا ثنائيا لأن $f(x, 0)$ غير معرَّفة.
هـ) $f$ مؤثر ثنائي تبادلي. ولبيان ذلك لاحظ أنه إذا كان $x, y \in X$ فإن $1 \le x\,y$ والآن

$$0 \le (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

وبالتالي

$$1 \le xy \le x^2 - xy + y^2 = f(x, y)$$

٢-١١٨-أ) $g(x) = -x$

ب) $f(x) = ax$

٢-١١٩ نفرض أن $R$ ترمز إلى المجموعة $\{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$. مجال $R$ (domain of) هو $Y$ لأن $f$ غامرة. وإذا كان $(y, x), (y, x') \in R$ فإن $x = x'$ لأن $f$ واحد لواحد. وبالتالي تكون $R$ دالة من $Y$ إلى $X$.

لكل $x \in X$ يوجد عنصر واحد بالضبط $y \in Y$ حيث $R(y) = x$
لأن f دالة . ولذلك فإن R واحد لواحد وغامرة .

٢-١٢٠- أ) صحيحة .
ب) خاطئة . مثال مناقض : $x = y = 1.5$
ج) خاطئة . مثال مناقض : $x = 2, y = 2.6$

٢-١٢١- أ) إذا كانت n عددا صحيحا فرديا فإن $n = 2k - 1$ حيث k عدد صحيح ما (some integer) . والآن

$$\frac{n^2}{4} = \frac{(2k-1)^2}{4} = \frac{4k^2 - 4k + 1}{4} = k^2 - k + \frac{1}{4}.$$

وحيث أن $k^2 - k$ عدد صحيح

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = k^2 - k$$

والآن نحصل على النتيجة المطلوبة لأن

$$\frac{n-1}{2}\,\frac{n+1}{2} = \frac{(2k-1)-1}{2}\;\frac{2k-1+1}{2}$$

$$= \frac{(2k-1)^2 - 1}{4}$$

$$= \frac{4k^2 - k}{4} = k^2 - k.$$

ب ) إذا كانت n عددا صحيحا فرديا ، فإن $n = 2k + 1$ حيث k عدد صحيح ما . والآن

$$\left\lceil \frac{n^2}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{4k^2 + 4k + 1}{4} \right\rceil = \left\lceil k^2 + k + \frac{1}{4} \right\rceil = k^2 + k + 1,$$

وكذلك

$$\frac{n^2+3}{4}=\frac{(4k^2+4k+1)+3}{4}=k^2+k+1.$$

٢-١٢٢- أ) $x = 1.5$

ب) نفرض $k=\lceil x\rceil$

$$\Rightarrow \quad k-1<x<k \;\&\; 2x\le 2k \quad \Rightarrow \quad \lceil 2x\rceil \le 2k = 2\lceil x\rceil$$

والآن

$$\lceil x\rceil = k < x+1 \quad \Rightarrow \quad 2\lceil x\rceil < 2x+2 \le \lceil 2x\rceil + 2 \quad \Rightarrow$$

$$2\lceil x\rceil - 2 < \lceil 2x\rceil \quad \Rightarrow \quad 2\lceil x\rceil - 1 \le \lceil 2x\rceil$$

٢-١٢٣- أ) الاثنين .

ب) السبت .

ج) الخميس . وذلك لأن :

$$y=\left(2004+\left\lfloor\frac{2003}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{2003}{100}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2003}{400}\right\rfloor\right) \bmod 7$$

$$=(2004+500-20+5) \bmod 7 = 2489 \bmod 7 = 4$$

٢-١٢٤- ب ) تكافؤ متتاليتين يعني أن يكون لمجاليهما ( domains ) الحجم نفسه ( same size ) ، وأن تتطابق / تتفق فيهما قيم المدى (their range values agree) : القيمة الأولى مع القيمة الأولى ، والثانية مع الثانية ، وهكذا.

ج) كي تتساوى متتاليتان يجب أن يتساوى مجالاهما ( equal domains ) ، وكذلك تتطابق قيم المدى فيهما : الأولى مع الأولى ، والثانية مع الثانية ، وهكذا . أما المتتاليتان المتكافئتان ( equivalent sequences ) فمن الممكن أن يختلف مجالاهما.

٢-١٢٥ f ليست واحدا لواحد . f غامرة ( onto ) .

٢-١٢٦ $x = y = 2.3$

٢-١٢٧ **عَرِّف** $f$ **من** $X = \{1, 2\}$ **إلى** $\{3\}$ **كما يلي :** $f(1) = f(2) = 3$ .

**وعَرِّف** $g$ **من** $\{1\}$ **إلى** $X$ **كما يلي:** $g(1) = 1$.

٢-١٢٨ **إدخال البيانات يتم بالكيفية التالية ، حيث** $a : b$ **تعني تخزين وحدة البيانات** $a$ **في الخلية** $b$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 : 1, | 784 : 4, | 18 : 5, | 329 : 6, |
| 43 : 7, | 281 : 8, | 620 : 9, | 1141 : 10, |
| 31 : 11, | 684 : 12 | | |

## أجوبة تمرينات رقم ٣

٣-١ أ) $2\times 4=8$

ب) $2\times 3\times 5=30$

ج) $3\times 3\times 5=45$

٣-٢ $8\times 4\times 5=160$

٣-٣ $5\times 6\times 2\times 3\times 3=540$

٣-٤ $2^6-1=63$

٣-٥ أ) $6^2=36$ ب) 3

ج) 6 د) $6+2=8$

هـ) 6 و) 10

ز) 11 ح) $5\times 5=25$

ط) 18

٣-٦ - أ) $10\times 5=50$

ب) $50\times 50=2500$

ج) $50\times 49=2450$

٣-٧ -أ) $26^3\times 10^2$

ب) $26\times 25\times 24\times 10\times 9$

٣-٨ -أ) $2^4=16$ ب) $2^6=64$

ج) $3\times 2^6 = 192$ د) 8

هـ) $(8\times 7)/2 = 28$ و) $2^8 - 1 = 255$

ز) $2^4 = 16$

٣–٩ أ) $5\times 4\times 3 = 60$

ب) $4\times 3\times 2 = 24$

ج) $3\times 2\times 4 = 24$

د) $3\times 4\times 3 = 36$

هـ) $5\times 4 + 5\times 4\times 3 = 80$

و) $2\times 5\times 4 = 40$

٣–١٠ أ) $5^3 = 125$

ب) $5\times 4\times 3 = 60$

ج) $4^3 = 64$

د) $4\times 3\times 2 = 24$

هـ) $5^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$

و) $3\times 4\times 3 = 36$

٣–١١ أ) $200 - 5 + 1 = 196$

ب) $(200 - 4)/2 = 98$

ج) $(200 - 4)/2 = 98$

د) 40

هـ) $200 - 72 = 128$

و) $5 + 9\times 9 + 9\times 8 = 158$

ز) i) **هناك عدد واحد من رقم واحد يحتوي على 7 وهو 7.**

ii) **وهناك 18 عدد من رقمين مختلفين يحتوي كل عدد منها على 7 ، وهذه الأعداد هي:**

17, 27, ..., 97, 70, 71, ... , 76, 78, 79

iii) **وهناك 19 عدد من ثلاثة أرقام مختلفة يحتوي كل منها على 7، وهذه الأعداد هي:**

$$107, 1xy$$

**حيث xy هو أحد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين [والمذكورة في ii)] وعددها 18.**

**وبالتالي فالإجابة المطلوبة هي :** 1 + 18 + 19 = 38

ح) **الأعداد التي تحتوي على 0 هي:**

i) **تسعة أعداد كل منها مكون من رقمين ، وهي:** 10, 20, ..., 90.

ii) 18 **عدد كل منها مكون من ثلاثة أرقام فيها 0 واحد ، وهي:**

101, 102, ..., 109, 110, 120, ..., 190

iii) **عددان كل منهما مكون من ثلاثة أرقام فيها صفران ، وهما** 100, 200**. وبالتالي تكون الإجابة المطلوبة (عدد الأعداد التي لا تحتوي على الرقم 0) هي:**

196-(9+18+2) = 167

ط) **الأعداد التي أكبر من 101 ولا تحتوي على الرقم 6 هي:**

i) 200

ii) **أي عدد صيغته 1xy ، حيث**

x **أو** y **هي أحد الأرقام** 0, 1, 2, ..., 5, 7, 8, 9

**باستثناء العددين** 100, 101

**وبذلك تكون الإجابة المطلوبة هي:**

$$1+1\times 9\times 9-2=80$$

ي) **الأعداد التي أرقامها متزايدة قطعا هي:**

i) **أعداد من رقم واحد فقط ، وهي:** 5, 6, ..., 9 **، وعددها 5.**

ii) **أعداد من رقمين فقط مثل** $12,13,...,19,23,24,...,29,...,89$

**وعددها:**

$$8+7+\cdots+1=36$$

iii) **أعداد من ثلاثة أرقام مثل:**

123, 124, ..., 129, 134, 135, ..., 139, ..., 189

**وعددها:** $7+6+\cdots+1=28$

**وبالتالي يكون العدد الإجمالي للأعداد التي أرقامها متزايدة قطعا هو:**

$$5+36+28=69$$

ك) **الأعداد المطلوبة صيغتها** $1yz$ **حيث** $y>1 \;\&\; y>z$ **، وهذه الأعداد هي:**

120, 121, 130, 131, 132, 140, 141, 142, ..., 190, ..., 198

**وعددها:**

$$2+3+...+9=44$$

**٣-١٢ – أ)** $12\times11\times10\times9\times8$

**ب)** $12^5$

**ج)** $12^5 - 12\times11\times10\times9\times8$

**٣-١٣ –أ)** $10\,!$

**ب)** $(5\,!)\,(2\,!)\,(3\,!)$

**ج)** $(5\,!)\,(5\,!)$

**د)** $(3\,!)\,(5\,!)\,(2\,!)\,(3\,!)$

**هـ) سنرتب الكتب حسب الشرط المطلوب على ثلاث خطوات:**

i) **رتِّب الثمانية كتب (في علم الحاسوب والرياضيات)بجوار بعضها البعض بأي ترتيب تختاره** $[B_1 B_2 \cdots B_8]$ **. هذه الخطوة يمكن أن يتم تنفيذها بعدد** $8\,!$ **من الطرق .**

ii) ضع أحد كتابي الآداب في أي موضع تختاره: إما يمين الكتب الثمانية أو شمالها أو بين أي كتابين منها. وهذه الخطوة يمكن أن يتم تنفيذها بتسع طرق(1 + 8).

iii) ضع كتاب الآداب الآخر في أي موضع تختاره بحيث لا يكون بجوار كتاب الآداب السابق (لا يمينه ولا شماله). وهذه الخطوة يمكن أن تتم بثمانية طرق (2 – 10).

وبالتالي يكون عدد طرق ترتيب الكتب حسب الشرط المطلوب مساويا :

$$8! \times 9 \times 8$$

٣–١٤ $26 + 26 \times 36 + 26 \times 36^2 + 26 \times 36^3 + 26 \times 36^4 + 26 \times 36^5$

٣–١٥ $m^n$

٣–١٦ أي كتاب من الـ 10 كتب التي سنختارها يمكن أن يكون:

ب) إحدى الـ 10 نسخ المتطابقة (Identical) ، وفي هذه الحالة سنرمز للكتاب بالرمز I.

ج) أو إحدى الـ 10 نسخ المختلفة (Different) من الـ 10 كتب المختلفة ، وفي هذه الحالة سنرمز للكتاب بالرمز D.

وبالتالي فعدد طرق اختيار الـ 10 كتب هو عدد السلاسل التي طول أي منها 10 ومكونة من رمزين ثنائيين (I, D) ، وهذا العدد يساوي $2^{10}$.

٣–١٧ $2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$

٣–١٨ أي مجموعة جزئية X ستحتوي على n عنصر أو أقل إذا وفقط إذا احتوت $\overline{X}$ على أكثر من n عنصر . وبالتالي فنصف المجموعات الجزئية بالضبط

تحتـوي علـى n عنصـر أو أقـل , وبنـاء عليـه فعـدد المجموعـات الجزئيـة المطلوب يساوي $\frac{1}{2}\times 2^{2n+1} = 2^{2n}$

٣-١٩ العدد $|X \cap Y|$ يُحسب مرتين.

٣-٢٠ بناءً على نتيجة السؤال ٣ - ١٩):

العدد الإجمالي المطلوب = عدد السلاسل التي تبدأ بالسلسلة الجزئية 100

+ عدد السلاسل التي رقمها الرابع 1

– عـدد السلاسـل الـتي تبـدأ بالسلسـلة الجزئيـة 100 ورقمها الرابع 1 .

أي أن العدد الإجمالي المطلوب يساوي $144 = 2^4 - 2^7 + 2^5$

٣-٢١ باستخدام نتيجة السؤال ٣ - ١٩):

العدد الإجمالي المطلوب = عدد السلاسل التي تبدأ بالرقم 1

+ عدد السلاسل التي تنتهي بالرقم 1

– عدد السلاسل التي تبدأ وتنتهي بالرقم 1

أي أن العدد الإجمالي المطلوب يساوي $192 = 2^6 - 2^7 + 2^7$

حل آخر :

العدد الإجمالي المطلوب = عدد جميع السلاسل – عدد السلاسل التي تبدأ وتنتهي بالرقم 0 .

أي أن العدد الإجمالي المطلوب يساوي $192 = 2^6 - 2^8$

٣-٢٢ – أ) نفرض $X \equiv$ الاختيارات (selections) التي يكون فيها B رئيسا.

$Y \equiv$ الاختيارات التي يكون فيها A أمينا للسر

$$|X| = |Y| \quad = \quad 5\times 4 \quad = 20$$

$$|X \cap Y| = 4$$

$$\Rightarrow \quad |X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

$$= 20 + 20 - 4 = 36$$

**ب) نفرض** $X \equiv$ **الاختيارات التي يكون فيها** $C$ **رئيسا .**

$Y \equiv$ **الاختيارات التي يكون فيها** $A$ **مسئولا عن أحد المناصب**

$$|X| = 5 \times 4 = 20, \quad |Y| = 3 \times 5 \times 4 = 60$$

$$|X \cap Y| = 2 \times 4 = 8$$

$$\Rightarrow \quad |X \cup Y| = 20 + 60 - 8 = 72$$

**٣-٢٣ عدد النتائج التي تكون فيها القطعة الزرقاء** $3$ **يساوي** $6$

**عدد النتائج التي يكون فيها المجموع زوجيا يساوي** $18$

**عدد النتائج التي تكون فيها القطعة الزرقاء** $3$ **والمجموع زوجيا يساوي** $3$

**وبتطبيق النتيجة** $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ **نحصل على**

$$|X \cup Y| = 6 + 18 - 3 = 21$$

**٣-٢٤ - أ)** $n^{n^2}$

**ب)** $n^{n(n-1)/2}$

**٣-٢٥** $2^4$

**٣-٢٦** $6 \times 9 \times 7 + 6 \times 9 \times 4 + 6 \times 7 \times 4 + 9 \times 7 \times 4$

**٣-٢٧** $2^n - 2$

**٣-٢٨** $6 \times 5 \times 4 \times 3 + 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$

**٣-٢٩ - أ)** $4! = 24$

ب) abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb,
bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca,
cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba,
dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba

ج) $P(4, 3)= 4(3)\ (2)= 24$

د) abc, acb, bac, bca, cab, cba, abd, adb, bad,
bda, dab, dba, acd, adc, cad, cda, dac, dca,
bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb

هـ) $11!$

و) $P(11, 5) = 11\times 10\times 9\times 8\times 7$

٣-٣٠ – أ) $P(11, 3) = 11\times 10\times 9$

ب) $P(12, 4) = 12\times 11\times 10\times 9$

ج) $P(12, 3) = 12\times 11\times 10$

٣-٣١ – أ) $3\,!$

ب) $3\,!\ 3\,!$

ج) $3\,!$ ، **وذلك لأن الثلاثة عناصر المعنونة** AE, C, DB **يمكن أن يتم تبديلها** (permuted) **بعدد** $3\,!$ **من الطرق.**

د) $4\,!\times 2$ ، **وذلك لأن عدد السلاسل التي تحتوي على السلسلة الجزئية** AE **يساوي** $4\,!$ ، **وكذلك عدد السلاسل التي تحتوي على السلسلة الجزئية** EA **يساوي** $4\,!$**. فيكون العدد الكلي المطلوب مساويا** $4\,!\times 2$.

هـ) $\frac{1}{2}\times 5!= 60$ ، **وذلك لأن نصف السلاسل تظهر فيها** A **قبل** D ، **والنصف الآخر تظهر فيه** D **قبل** A.

و) **نحسب أولا عدد السلاسل التي تحتوي إما على AB أو على CD.**

**نفرض أن**

X: **مجموعة السلاسل التي تحتوي على AB**

Y: **مجموعة السلاسل التي تحتوي على CD**

**ومن طرق / مسائل سابقة نستنتج أن**

$$|X| = |Y| = 4! = 24$$

$$|X \cap Y| = 3! = 6$$

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

$$= 24 + 24 - 6 = 42$$

**أي أنه يوجد 42 سلسلة تحتوي إما على AB أو على CD. وحيث أن العدد الكلي للسلاسل يساوي $120 = 5!$ ، فلذلك يكون عدد السلاسل التي لا تحتوي على أي من السلسلتين AB, CD هو:**

$$120 - 42 = 78$$

ز) **مثل طريقة حل الجزء و) السابق. ولاحظ هنا أن:**

X: **مجموعة السلاسل التي تحتوي على AB**

Y: **مجموعة السلاسل التي تحتوي على BE**

$$|X| = |Y| = 4! = 24$$

**وأي سلسلة ستحتوي على كل من AB, BE إذا وفقط إذا احتوت على ABE ، وعدد هذه السلاسل يساوي**

$$|X \cap Y| = 3! = 6$$

**ولذلك فإن**

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 42$$

**وبالتالي يكون عدد السلاسل التي لا تحتوي على أي من السلسلتين AB, CD هو:** $120-42 = 78$

ح) **اختر أي ثلاثة مواضع (من الخمسة مواضع التي ستوضع فيها الحروف الخمسة) وضع فيها الحروف الثلاثة A, C, E بهذا الترتيب (لتظهر A**

قبل C ، و C قبل E. [مثلا: CE – A -]. ثم ضع الحرفين الباقيين B, D في الموضعين الباقيين بأي ترتيب [مثلا: DABCE أو BADCE].

ولذلك يكون عدد السلاسل المطلوب هو:

$$C(5,3)\times 2! = \frac{5!}{3!} = 20$$

ط) [انظر طريقة حل الجزء و) والجزء ز)]. عدد السلاسل المطلوب:

$$\begin{aligned}|X\cup Y| &= |X|+|Y|-|X\cap Y| = \\ &= 4!+4!-3! \\ &= 42\end{aligned}$$

٣-٣٢ أ) يمكن أولا لفريقي V, J (وعدد أفرادهما 18) أن يصطفوا بأي ترتيب ، وهذا يمكن أن يتم بعدد !18 من الطرق. ولكل واحدة من طرق الاصطفاف هذه يمكن لأفراد فريق M أن يقفوا في أي 5 مواضع من بين الـ 19 موضع: يمين أفراد فريقي V, J أو شمالهم أو فيما بينهم ، وهذا يمكن أن يتم بعدد $P(19,5)$ من الطرق. وبالتالي يكون العدد الإجمالي المطلوب لطرق الاصطفاف: $18!\times P(19,5)$

ب) $10!$

ج) $9!$

د) يمكن أولا لأفراد فريق M أن يجلسوا حول المائدة المستديرة (بعدد !4 من الطرق). ثم يجلس أفراد فريق J في الأماكن / المواضع البينية (in-between spots) [بين أفراد فريق M] (بعدد $5\times4\times3\times2\times1$ من الطرق). وبالتالي فالإجابة المطلوبة هي:

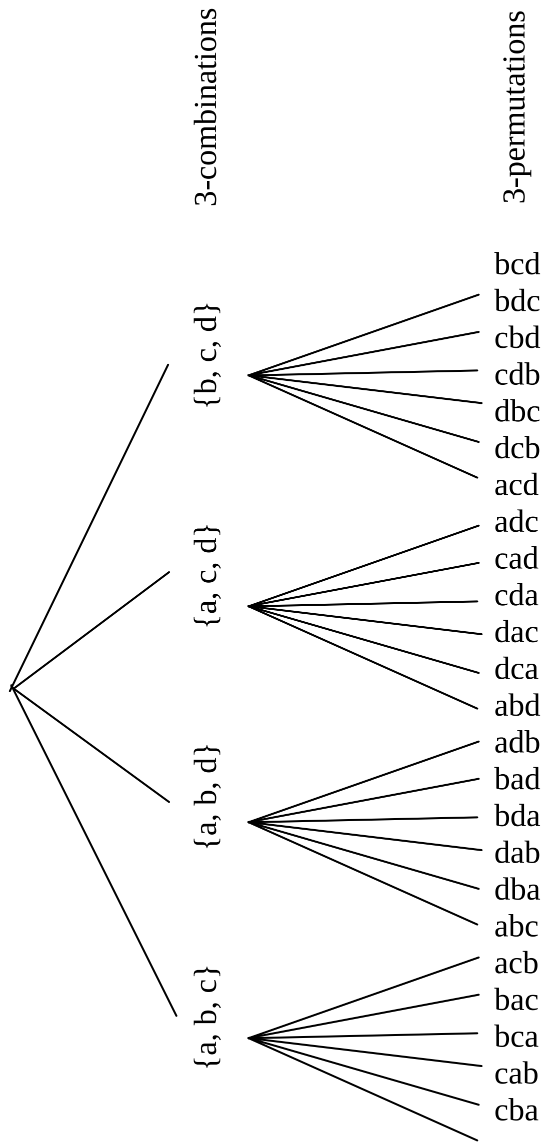
$$4!\times 5!$$

هـ) ثَبِّت مقعدا (fix a seat) لأحد أفراد فريق J. يمكن لباقي أفراد فريق J أن يجلسوا بعدد !7 من الطرق. ولكل طريقة من طرق جلوس فريق J يمكن لأفراد فريق M أن يجلسوا في أي 5 من المواضع الثمانية البينية ، وهذا يمكن أن يتم بعدد $P(8,5)$ من الطرق. وبالتالي يكون العدد الإجمالي المطلوب لطرق الجلوس هو: $7!\,P(8,5)$.

٣–٣٣ أ) $C(4, 3) = 4$

ب) $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$

ج)



٣-٣٤ أ) $C(11, 3)$ ب) $C(12, 4)$

ج) $C(44, 6)$ د) $C(48, 6)$

٣-٣٥ أ) $C(13, 5)$

ب) $C(6, 3) . C(7, 4)$

ج) العدد الإجمالي للجان التي تتكون من أربعة أشخاص = $C(13, 4)$. عدد اللجان التي تتكون من أربعة أشخاص ولا تشتمل على أي طالبة = $C(6, 4)$. وبالتالي يكون عدد اللجان التي تتكون من أربعة أشخاص من بينهم طالبة واحدة على الأقل = $C(13, 4) - C(6, 4)$.

د) اللجنة التي يكون فيها طالب واحد على الأكثر إما أن تشتمل على طالب واحد بالضبط أو لا يكون فيها أي طالب على الإطلاق. عدد اللجان التي تشتمل أي منها على طالب واحد بالضبط ( وثلاث طالبات) =

$$C(6,1) . C(7,3)$$

وعدد اللجان التي لا يكون فيها أي طالب ( وتضم أربع طالبات) =

$$C(7, 4)$$

وبالتالي يكون عدد اللجان المطلوب =

$$C(6, 1) . C(7, 3) + C(7, 4)$$

هـ) عدد اللجان المطلوب = العدد الإجمالي للجان المكونة من أربعة أشخاص – [( عدد اللجان المكونة من أربعة أشخاص كلهم طلاب) + (عدد اللجان المكونة من أربعة أشخاص كلهم طالبات)]

أي أن عدد اللجان المطلوب يساوي

$$C(13, 4) - \left[ C(6, 4) + C(7, 4) \right]$$

و) عدد اللجان المطلوب = العدد الإجمالي "m" للجان المكونة من أربعة أشخاص – عدد اللجان "n" المكونة من أربعة أشخاص من بينهم أسامة وعمرو ( مجتمعين).
وهذا العدد الأخير "n" يساوي عدد اللجان المكونة من أي شخصين من بين الـ 11 شخص الباقين ( بعد استبعاد أسامة وعمرو من الـ 13 شخص) .

$$m = C(13, 4), \quad n = C(11, 2)$$

وبالتالي يكون عدد اللجان المطلوب =

$$C(13, 4) - C(11, 2)$$

٣-٣٦ $C(10, 4) . C(12, 3) . C(4, 2)$

٣-٣٧ أ ) $C(8, 3)$

ب ) ست سلاسل هي:
00011111,10001111,11000111,11100011,11110001, 11111000

ج ) سنحسب أولا عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية "m" التي لا تحتوي أي منها على صفرين متعاقبين وسنُقَسِّم هذه المسألة إلى: حساب عدد هذه السلاسل التي تحتوي على ثمانية آحاد بالضبط ، وعدد هذه السلاسل التي تحتوي على سبعة آحاد بالضبط ، .... وهكذا.

- توجد سلسلة واحدة ( ثمانية الأرقام الثنائية ) لا تحتوي على صفرين متعاقبين ، وتحتوي على ثمانية آحاد بالضبط.
- إذا كانت السلسلة (ثمانية الأرقام الثنائية) التي لا تحتوي على صفرين متعاقبين تحتوي على سبعة آحاد بالضبط ، فإن الصفر 0 يمكن أن يتواجد في أي من مواضع ثمانية : يمين السبعة آحاد أو شمالها أو بين أي اثنين منها ، وبالتالي فعدد هذه السلاسل يساوي 8.

- إذا كانت السلسلة التي لا تحتوي على صفرين متعاقبين تحتوي على ستة آحاد بالضبط ، فإن الصفرين يجب أن يتواجدا في أي اثنين من السبعة المواضع المبينة بالعلامات "–" :

$$- 1 - 1 \; - 1 - 1 - 1 - 1 -$$

وبالتالي فيمكن أن نضع الصفرين بعدد C(7, 2) من الطرق ، أي أن عدد هذه السلاسل يساوي C(7, 2).

- بالمثل عدد السلاسل التي لا تحتوي على صفرين متعاقبين وتحتوي على خمسة آحاد بالضبط يساوي C(6, 3).
- وعدد السلاسل التي لا تحتوي على صفرين متعاقبين وتحتوي على أربعة آحاد بالضبط يساوي C(5, 4).
- إذا احتوت سلسلة على أقل من أربعة آحاد فإنها ستحتوي على صفرين متعاقبين.

بناءً على ما سبق فإن عدد السلاسل ثمانية الأرقام الثنائية التي لا تحتوي على صفرين متعاقبين يساوي

$$1 + 8 + C(7, 2) + C(6, 3) + C(5, 4)$$

وحيث أن العدد الإجمالي للسلاسل ثمانية الأرقام الثنائية هو $2^8$ ، فإن العدد المطلوب للسلاسل ثمانية الأرقام الثنائية التي تحتوي أي منها على صفرين – على الأقل – متعاقبين يساوي

$$2^8 - \left[ 1 + 8 + C(7,2) + C(6,3) + C(5,4) \right]$$

٣-٣٨ أ) $48 = 48 \times 1$ (الأربعة آحاد يمكن أن يُختاروا بطريقة واحدة ، والبطاقة / الورقة الخامسة يمكن أن تُختار بـ 48 طريقة).

ب) $13 \times C(48, 1)$ [اختر الفئة (denomination) ، ثم اختر الورقة الخامسة (المخالفة) (odd card)].

ج) C(13, 5)

د ) **سنحسب أولا عدد مجموعات اليد (المختلفة)** (number of hands) **التي تحتوي أي منها على خمس أوراق**(cards) **من نقشين معينين / محددين وليكونا مثلا البستوني والقلبي:**

**نظرا لأن هناك** 26 **ورقة من هذين النقشين ، فيكون لدينا** $C(26, 5)$ **طريقة لاختيار** 5 **أوراق من بين هذه الأوراق الـ** 26. **أي لدينا** $C(26, 5)$ **مجموعة (مختلفة) تحتوي أي منها على خمس أوراق من نقش البستوني فقط أو من النقش القلبي فقط أو من النقشين معا.**

**وحيث أن هناك** $C(13, 5)$ **مجموعة من نقش البستوني فقط ، وكذلك** $C(13, 5)$ **من النقش القلبي فقط ، فلذلك يكون عدد المجموعات (أي عدد الطرق المختلفة لاختيار خمس أوراق) من نفشي البستوني والقلبي معا مساويا**

$$C(26, 5) - 2\,C(13, 5)$$

**وحيث أن لدينا** $C(4, 2)$ **طريقة لاختيار أي نقشين ، فيكون العدد المطلوب لاختيار خمس أوراق من نقشين بالضبط هو :**

$$C(4, 2)\,.\left[C(26, 5) - 2C(13, 5)\right]$$

هـ ) **يجب أن نختار ورقتين من نقشٍ ما ، وورقة واحدة من كل من النقشات الثلاث الأخرى . ولذلك :**

- **اختر النقش ذا الورقتين.**
- **اختر ورقتين من هذا النقش.**
- **اختر ورقة واحدة من كل من النقشات الثلاث الأخرى.**

**وبناءً على ذلك يكون العدد المطلوب لاختيار الخمس أوراق :**

$$4 \times C\,(13, 2) \times 13 \times 13 \times 13$$

و ) 4

ز ) i ) **هناك** 9 **نماذج للأوراق الخمس المتعاقبة** (consecutive patterns)

A2345, 23456, 34567, 45678, 56789,
6789T, 789TJ, 89TJQ, 9TJQK

ii ) **وهناك** 4 **أنواع ممكنة من النقش** (possible suits) **لكل نموذج .**

وبالتالي فالعدد المطلوب لطرق اختيار خمس أوراق متعاقبة من النقش نفسه هو $9 \times 4 = 36$ .

ح ) i) اختر أقل فئة (pick the lowest card's denomination)

ii) ثم اختر نقش كل من الفئات الخمس المتعاقبة

وبالتالي فإن العدد المطلوب لاختيار خمس أوراق متعاقبة يساوي $9 . 4^5$

ط ) i) اختر الفئتين ذواتي الورقتين .

ii) اختر الفئة ذات الورقة الواحدة .

iii) اختر ورقتين من كل من الفئتين ذواتي الورقتين.

iv) اختر ورقة واحدة من الفئة ذات الورقة الواحدة.

وبالتالي يكون العدد المطلوب لاختيار الأوراق الخمس مساويا

$$C(13, 2) . C(11, 1) . C(4, 2) . C(4, 2) . C(4, 1)$$

٣-٣٩ أ ) $C(52, 13)$

ب) 4

ج) i) اختر النقشين.

ii) ثم اختر الـ 13 ورقة من هذين النقشين (بالضبط)

عدد هذه الاختيارات ii) يساوي:

[عـدد اختيـارات 13 ورقـة مـن بـين 26 ورقـة (وهـي أوراق هـذين النقشين)] – (عدد اختيارات 13 ورقة من أحد النقشين فقط) – (عدد اختيارات 13 ورقة من النقش الآخر فقط)

أي يساوي :

$$C(26, 13) – 1 – 1$$

وبالتالي فالعدد المطلوب لاختيار 13 ورقة من نقشين بالضبط يساوي:

$$C(4, 2) . [C(26,13) - 2 ]$$

د) i) اختر الأربعة آحاد

ii) ثم اختر التسع أوراق المتبقية

وبالتالي فإن العدد المطلوب لاختيار الـ 13 ورقة يساوي $1 . C(48, 9)$

هـ) العدد المطلوب = $C(13, 1) . C(13, 3) . C(13, 4) . C(13, 5)$

و) i) اختر النقشات (ترتيب اختيارها يحدد عدد أوراق كل نقش: 5 أو 4 أو 3 أو 1)

ii) ثم اختر عدد الأوراق المطلوب من كل من هذه النقشات.

وبالتالي يكون العدد المطلوب لاختيار الـ 13 ورقة مساويا

$4! . C(13, 5) . C( 13, 4 ) . C ( 13, 3 ) . C ( 13, 1 )$

ز) i) اختر النقشات الثلاثة ذوات الأوراق الأربع.

ii) اختر الأربع أوراق من كل من النقشات الثلاثة.

وبالتالي يكون العدد المطلوب لاختيار الـ 13 ورقة مساويا:

$$4 . C(13, 4) . C(13, 4) . C(13, 4) . C(13,1)$$

$$= 4 . C(13, 4)^3 . C(13,1)$$

ح) اختر 13 ورقة من بين الـ 32 ورقة التي لا تحتوي على ورقة / بطاقة وجه .

وعدد هذه الاختيارات يساوي $C (32, 13)$

[ عدد بطاقات الوجه = $20 = 4\times5$ ] .

٣-٤٠ أ) $2^{10}$ ب) $C(10, 3)$

ج) $C(10, 3) + C(10, 2) + C(10, 1) + C(10, 0)$

د) $2^9$ هـ) $C(10, 5)$

٣-٤١ أ) $C(50, 4)$ ب) $C(46, 4)$

ج) اختر مشغلين سليمين ، ومشغلين معيبين

عدد هذه الاختيارات : $C(46, 2) . C(4, 2)$

د) العدد المطلوب = العدد الإجمالي لطرق اختيار أي أربعة مشغلات

– عدد طرق اختيار أربعة مشغلات سليمة

أي أن العدد المطلوب يساوي

$C(50, 4) – C(46, 4)$

٣-٤٢ أ ) نفرض أننا سنمثّل (represent) السلسلة الجزئية 10 بالرمز "*" أي بنجمة. وحيث أن هذه السلسلة الجزئية المكونة من رقمين ثنائيين تتكرر مرتين فيتبقى من سلسلة الرموز الثنائية التي طولها n رموز عددها n – 4. هذه الرموز الباقية يمكن أن توضع في ثلاثة مواضع مختلفة تقع إما بين النجمتين (in – between) أو يمينهما أو شمالهما أي في الطرفين (end positions) . لكل من مجموعات الرموز الثنائية (groups of bits) الثلاث التي ستوضع في أي من هذه المواضع الثلاثة إذا كان أحد رموزها 1 فيجب أن تكون جميع الرموز الثنائية التي تقع يمينه في هذه المجموعة آحادا 1 أيضا (لأن السلسلة الجزئية 10 تتكرر مرتين بالضبط). سنضع خطاً رأسياً "|" بين الأصفار والآحاد في كل من هذه المجموعات الثلاث. وبالتالي فأي سلسلة يمكن أن تمثل هكذا:

$$0^a\,|1^b * 0^c\,|1^d * 0^e|1^f$$

حيث

$$0 \le a, b, c, d, e, f \le n - 4$$

وكذلك

$$a + b + c + d + e + f = n - 4$$

وتتحدد أي سلسلة معينة باختيار خمسة مواضع من بين الـ n + 1 موضع للنموذج | * | * |. وبالتالي فإن عدد مثل هذه السلاسل يساوي C(n + 1, 5) . مثلا بالنسبة للحالة n = 7 نختار خمسة مواضع من بين ثمانية مواضع للنموذج | * | * | كما يلي:

$$\left|\underset{*}{\underline{1\ \ 0}}\ \ 0\right|1\ \ \underset{*}{\underline{1\ \ 0}}\ \Big|1$$

حيث

$$a = 0 = b,\quad c = 1 = d,\quad e = 0,\quad f = 1$$
$$a + b + c + d + e + f = 3 = 7 - 4$$

ب ) ثَبِّت مواضع الآحاد التي عددها $n - k$. الأصفار التي عددها k يمكن أن توضع في المواضع التي بين الآحاد أو يمينها أو يسارها (بحيث لا يوضع صفران بجوار بعضيهما البعض) ، وهذه المواضع عددها $n - k + 1$. أي أن عدد الطرق التي يمكن أن توضع بها الأصفار (وبالتالي عدد السلاسل) يساوي $C(n - k + 1, k)$.

٣-٤٣ [مثلا حاصل ضرب $8 \times 7 \times 6 \times 5$ يقبل القسمة على !4]

انظر صيغة $C(n, k)$. [مثلا اختيار 4 أعداد من n عدد ممكن أن يتم بطرق عددها $C(n, 4)$ وهذه تقبل القسمة على !4].

٣-٤٤ الكيفية الأولى:

- هناك $P(n, r)$ طريقة لوضع العناصر المختلفة التي عددها r.
- وهناك طريقة واحدة لوضع العناصر المتطابقة في الأماكن المتبقية.

وبالتالي يكون عدد الطرق لترتيب جميع العناصر مساويا:

$$P(n, r) \times 1 = P(n, r)$$

الكيفية الثانية:

- هناك $C(n, n-r) = C(n, r)$ طريقة لاختيار مواضع للعناصر المتطابقة التي عددها n-r.
- وبعد وضع العناصر المتطابقة في هذه المواضع ، هناك !r طريقة لوضع العناصر المختلفة في الأماكن المتبقية التي عددها r.

وبالتالي يكون عدد الطرق لترتيب جميع العناصر مساويا:

$$C(n, r) \times r!$$

وبمساواة النتيجتين نصل إلى العلاقة المطلوبة

$$P(n, r) = r!\, C(n, r)$$

٣-٤٥ أ) إذا كان عدد الموائد أكبر من عدد الأشخاص فمن المستحيل أن يجلس شخص واحد على الأقل حول أي مائدة.

ب) إذا كان عدد الموائد يساوي عدد الأشخاص ، ومطلوب أن يجلس شخص واحد على الأقل حول أي مائدة ، فمعنى ذلك أنه سيجلس شخص واحد بالضبط حول أي مائدة.

ج) عدد طرق جلوس n شخص حول مائدة مستديرة يساوي $(n-1)!$ [انظر الملاحظة بعدمثال ٣-١٥].

د) عدد الأشخاص أكبر من عدد الموائد بواحد. ولذلك سيجلس شخصان حول مائدة ، وشخص واحد عند أي مائدة أخرى. ويمكن اختيار الشخصين اللذين سيجلسان حول مائدة واحدة بعدد $C(n, 2)$ من الطرق.

هـ) عدد الأشخاص n ، ولدينا مائدتان. سنثبت العلاقة المطلوبة بالاستقراء على n.

الخطوة الأساسية $(n=2)$: $s_{2,2}=1$ متحققة من الجزء (ب).

الخطوة الاستقرائية: نفرض أن العلاقة صحيحة عند n. ولإثبات أنها صحيحة عند n+1 نفرض الآن أن لدينا n+1 شخصا. اختر شخصا واحدا. هذا الشخص إما أنه سيجلس بمفرده أو مع آخرين.

- إن جلس بمفرده على مائدة ، فإن الآخرين يمكنهم الجلوس حول المائدة الأخرى بعدد $(n-1)!$ من الطرق.
- وإن لم يجلس بمفرده بل مع آخرين فبالفرض الاستقرائي يمكن للأشخاص الباقين وعددهم n أن يجلسوا بعدد من الطرق يساوي

$$(n-1)!\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$$

ويمكننا إضافة هذا الشخص رقم $(n+1)$ إلى ترتيب الجلوس هذا (this seating arrangement) بعدد n من الطرق (يمين أي واحد من الأشخاص الآخرين وعددهم n). وبالتالي – في حالة عدم جلوس هذا الشخص رقم $(n+1)$ بمفرده – يكون عدد الطرق التي يمكننا بها أن نُجلس $(n+1)$ شخصا مساويا

$$n.(n-1)!\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}=n!\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$$

- بناءً على ما سبق يكون العدد الكلي لطرق الجلوس هو

$$(n-1)!+n!\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}=n!\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

وبذلك يتم التحقق من الخطوة الاستقرائية.

و) نثبِّت n ، أي عندنا عدد معين n من الأشخاص. كل طريقة من طرق جلوس (seating) هؤلاء الأشخاص الذين عددهم n حول k مائدة مستديرة – بشرط جلوس شخص واحد على الأقل حول أي مائدة – تحدد تبديلا وحيدا (a unique permutation) للأعداد $1, 2, \cdots, n$.
فإذا كان الأشخاص

$$p(i,1), p(i,2), \cdots, p(i,e_i)$$

جالسين في اتجاه دوران عقربي الساعة (are seated clockwise) حول المائدة i ، حيث $i = 1, 2, ..., k$ ، بهذا الترتيب (in this order) ، فإننا نفسِّر (interpret) هذا الوضع على أنه التبديل (permutation) الذي يعرِّفه الإسقاط (mapping) :

$$\begin{gathered}
p(1,1)\to p(1,2)\\
p(1,2)\to p(1,3)\\
\vdots\\
p(1,e_1-1)\to p(1,e_1)\\
p(1,e_1)\to p(1,1)\\
\vdots\\
p(k,1)\to p(k,2)\\
p(k,2)\to p(k,3)\\
\vdots\\
p(k,e_k-1)\to p(k,e_k)\\
p(k,e_k)\to p(k,1)
\end{gathered}$$

[ملاحظة: هذا التمثيل (representation) يطلق عليه "تحليل / تفكيك تبديل إلى دوراته" (decomposition of a permutation into its cycles)]. وحيث أن جميع التباديل موجودة لدينا فإننا نحصل على المعادلة المطلوبة.

ز) سنثبت أن $s_{3,1} = 2$ وأن

$$s_{n,n-2} = 2C(n, n-3) + 3C(n, n-4) \quad \text{for } n \geq 4$$

من الجزء ج) نرى أن $s_{3,1} = 2$.

إذا كانت $n \geq 4$ فهناك ترتيبان أساسيان لطريقة الجلوس (two basic seating arrangements):

(i) (n-3) مائدة يجلس شخص واحد عند كل مائدة منها ، ومائدة واحدة يجلس حولها ثلاثة أشخاص. عدد طرق جلوس الأشخاص بهذه الكيفية يساوي 2C(n, n-3) ، وذلك لأنه يمكننا اختيار الأشخاص الذين سيجلسون فُرادى (solitary persons) وعددهم (n-3) بعدد من الطرق يساوي C(n, n-3) ، ثم نُجلس الأشخاص الثلاثة الباقين حول مائدة واحدة بعدد 2! من الطرق (باستخدام الصيغة الموجودة في الجزء ج).

(ii) (n-4) مائدة يجلس شخص واحد عند كل مائدة منها ، ومائدتان يجلس حول كل منهما شخصان. اختر الأشخاص الذين سيجلسون فُرادى وعددهم (n-4) بعدد من الطرق يساوي C(n, n-4) ، ثم أَجلس الأربعة أشخاص الباقين بثلاث طرق حول المائدتين. وبالتالي يكون عدد طرق جلوس الأشخاص بهذه الكيفية مساويا 3C(n, n-4).

من (i) و (ii) نحصل على الصيغة المطلوب إثباتها.

٣-٤٦ أ) إذا كان $n < k$ فلا يمكن تجزئة مجموعة مكونة من n عنصر إلى k مجموعة جزئية غير خالية.

ب) هناك طريقة واحدة لتجزئة مجموعة مكونة من n عنصر إلى n مجموعة جزئية غير خالية:وهي أن تحتوي كل مجموعة جزئية على عنصر واحد.

ج) هناك طريقة واحدة لتجزئة مجموعة مكونة من n عنصر إلى مجموعة جزئية واحدة غير خالية: وهي أن تكون هذه المجموعة الجزئية هي نفسها المجموعة المكونة من n عنصر.

د) ، هـ) ، و): انظر ز) ، ح).

ز) نفرض أن X مجموعة مكونة من n عنصر ، وأن $x \in X$ . لكل مجموعة جزئية غير خالية Y من $X-\{x\}$ ، المجموعة $\{Y, X-Y\}$ تعد تجزئة للمجموعة X. وحيث أن هذه هي أيضا جميع التجزئات ، فلذلك تكون $S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$.

ح) أي تجزئة لمجموعة مكونة من n عنصر إلى مجموعات جزئية عددها (n-1) ستتكون من مجموعة جزئية تحتوي على عنصرين ، و (n-2) مجموعة جزئية تحتوي كل منها على عنصر واحد. والمجموعة الجزئية التي تحتوي على عنصرين يمكن اختيارها بعدد $C(n, 2)$ من الطرق. ولذلك فإن $S_{n,n-1} = C(n, 2)$.

ط) $S_{n,n-2} = C(n, 3) + 3C(n, 4)$

إذا جَزَّأنا مجموعة مكونة من n عنصر إلى مجموعات جزئية عددها (n-2):

i) فإما أنه سيكون لدينا مجموعة جزئية واحدة مكونة من ثلاثة عناصر ، ومجموعات جزئية أخرى تتكون أي منها من عنصر واحد [وهناك $C(n, 3)$ من المجموعات في هذا الاحتمال].

ii) وإما أن يكون لدينا مجموعتان جزئيتان تتكون كل منهما من عنصرين ، ومجموعات جزئية أخرى تتكون أي منها من عنصر واحد [وهناك $C(n,4)$ من الطرق لاختيار العناصر الأربعة – التي ستُكَوِّن المجموعتين الجزئيتين الثنائيتين (doubletons) – ثم هناك ثلاث طرق لترتيب (organizing) العناصر الأربعة في

المجمـوعتين الجـزئيتين الثنـائيتين ، أي أن العـدد الإجمـالي للمجموعات في هذا الاحتمال يساوي $3C(n,4)$.

ي) استخدم نظرية ٢-٣ ونظرية ٢-٤.

٣-٤٧ سنكوِّن السلاسل المطلوبة بخطوات ثلاث:

الأولى: نختار مواضع للحروف A, C, E [وهذه يمكن أن تتم بعدد $C(6,3)$ من الطرق].

الثانية: نضع الحروف A, C, E في هذه المواضع. ويمكننا وضع C بطريقة واحدة (أقصى اليمين أي الأخير) كما يمكننا وضع A, E بطريقتين (AE أو EA).

الثالثة: نضع الحروف الثلاثة المتبقية [وهذه يمكن أن يتم تنفيذها بعدد $3!$ من الطرق].

وبالتالي فإن العدد الكلي للسلاسل يساوي $C(6, 3).\ 2.\ 3!$.

٣-٤٨ i) يمكننا اختيار نقشين بعدد $C(4, 2)$ من الطرق.

ii) يمكننا اختيار ثلاث أوراق من نقش معين بعدد $C(13, 3)$ من الطرق.

iii) وكذلك يمكننا اختيار ثلاث أوراق من النقش الآخر بعدد $C(13, 3)$ من الطرق.

وبالتالي يكون العدد الكلي للطرق المختلفة لاختيار الأوراق الست المطلوبة هو: $C(4,2).C(13,3)^2$

٣-٤٩ يجب أن نختار إما ثلاثة أو أربعة أقراص معيبة. وبالتالي فالعدد الكلي للاختيارات هو:

$$C(5, 3).C(95, 1) + C(5, 4)\ .$$

ثالثا: معاملات ذات الحدين والمتطابقات التوافيقية

٣-٥٠ أ) $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

ب) $32c^5 - 240c^4d + 720c^3d^2 - 1080c^2d^3 + 810cd^4 - 243d^5$

٣-٥١ أ) $C(11, 7)x^4y^7$

ب) $59136s^6t^6$

ج) $C(10, 2)C(8, 3) = 10!/(2!\,3!\,5!)$

د) 5,987,520

هـ) C(5, 2)

و) C(5, 2)

ز) C(7, 3) + C(5, 2)

**وذلك لأن**

$$\begin{aligned}
&(a + \sqrt{ax} + x)^2 (a + x)^5 \\
&= [(a + x) + \sqrt{ax}]^2 (a + x)^5 \\
&= (a + x)^7 + 2\sqrt{ax}(a + x)^6 + ax(a + x)^5
\end{aligned}$$

٣-٥٢ أ) $C(10 + 3 - 1, 10)$

ب) $C(12 + 4 - 1, 12)$

ج) $C(12 + 3 - 1, 12) + C(11 + 3 - 1, 11) + C(10 + 3 - 1, 10)$

٣-٥٣ أ) 1 8 28 56 70 56 28 8 1

٣-٥٤ أ) $C(n, k) < C(n, k + 1)$ if and only if

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

if and only if k+1 < n-k if and only if k < (n-1)/2

٣-٥٥ ضع $a = 1, b = -1$ في نظرية ذات الحدين.

٣-٥٦ $2^3.8!/(3!\,1!\,4!)$

٣-٥٧
$$
\begin{aligned}
C(n, k-1) + C(n, k) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n!)k}{k!(n-k+1)!} + \frac{(n!)(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n!)(n+1)}{k!(n-k+1)!} = C(n+1, k).
\end{aligned}
$$

٣-٥٨ اختيار مجموعة X مكونة من k عنصر يؤدي أيضا إلى اختيار مجموعة X مكونة من (n-k) عنصر.

٣-٥٩ $(n+1)n(n-1)/3$

٣-٦٠ استخدم العلاقة

$$k^2 = 2C(k, 2) + C(k, 1)$$

٣-٦١ ضع $a = 1, b = 2$ في نظرية ذات الحدين.

٣-٦٢ استخدم نتيجة السؤال ٣-٥٥ ومتطابقة مثال ٣-٣٠.

٣-٦٣ أ) استخدم برهانا مماثلا للبرهان التوافيقي (combinatorial proof) لنظرية ذات الحدين.

ب)
$$x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz +$$
$$3xz^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$$

٣-٦٤ ضع $a = b = c = 1$ في نتيجة السؤال ٣-٦٣-أ.

٣-٦٥ أ) في نظرية ذات الحدين ضع $a = 1, b = x$ وكذلك $(n-1)$ بدلا من $n$ لتحصل على

$$(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C(n-1, k)x^k$$

ثم اضرب طرفي هذه المعادلة في $n$ فنحصل على

$$n(1+x)^{n-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} C(n-1, k)x^k$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} C(n-1, k-1)x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}kx^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C(n, k)kx^{k-1}$$

ب) ضع $x = 1$ في نتيجة الجزء أ) من السؤال.

ج) الخطوة الاستقرائية:

$$\sum_{k=1}^{n+1} kC(n+1, k) = \sum_{k=1}^{n} k[C(n, k-1) + C(n, k)] + (n+1)C(n+1, n+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} kC(n,k-1) + \sum_{k=1}^{n} kC(n,k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)C(n,k-1) + \sum_{k=1}^{n+1} C(n,k-1) + \sum_{k=1}^{n} kC(n,k)$$

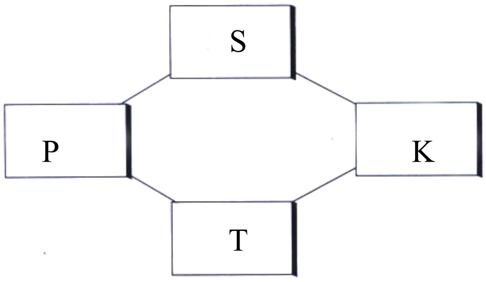
٣-٦٦ ضع $a = 2 , b = -1$ في نظرية ذات الحدين لتحصل على

$$1 = 1^n = [2+(-1)]^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)2^{n-k}(-1)^k.$$

## أجوبة تمرينات رقم ٤

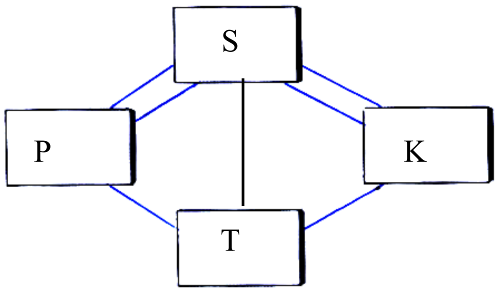
### أولا: المخططات البيانية

٤-١ أ)



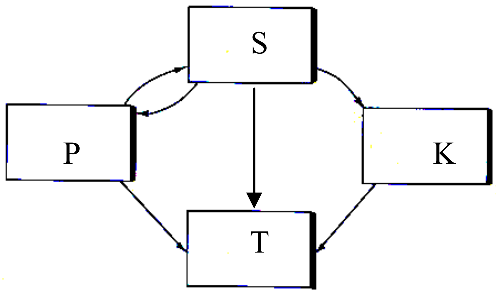

المخطط مخطط بياني بسيط غير موجَّه.

ب)



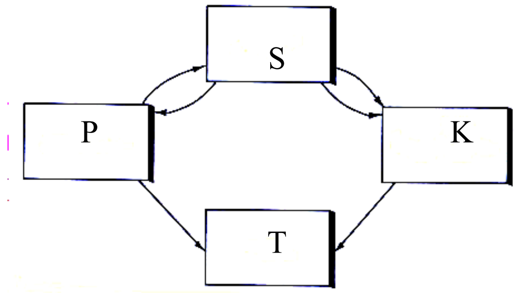

المخطط مخطط بياني (غير بسيط) غير موجَّه.

ج)




المخطط مخطط بياني بسيط موجَّه.

د)




**المخطط مخطط بياني (غير بسيط) موجَّه.**

٤–٢ **أ) لأن هناك رؤوسا** (c, d) **يمس** (touch)/**يلاقي كلاً منها عدد فردي من الأحرف.**

**ب) لأن هناك رؤوسا** (b, d) **درجة كل منها فردية.**

**ج) لأن هناك رؤوسا** (b, d) **درجة كل منها فردية.**

٤–٣ **أ)** (a, c, e, b, c, d, e, f, d, b, a)

**ب)** (a, c, f, e, c, b, e, d, b, a)

**ج)** (a, b, c, e, b, d, e, f, c, g, h, i, f, h, e, g, d, a)

٤–٤ **أ)** $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

**الأحرف المتوازية:** $e_1, e_6$. **عروة:** $e_5$

**لا توجد رؤوس معزولة.** G: **ليس مخططا بيانيا بسيطا.**

**الحرف** $e_1$ **يقع على الرأسين** $v_1, v_2$.

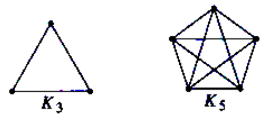
**ب)**

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

**لا توجد أحرف متوازية. ولا توجد أي عروة. ولا توجد رؤوس معزولة.** G **مخطط بياني بسيط. والحرف** $e_1$ **يقع على الرأسين** $v_2, v_4$.

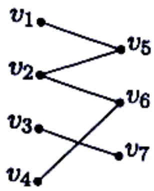
ج) $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ . والمجموعة $E$ خالية. لا توجد أحرف متوازية ، ولا توجد أي عروة. جميع الرؤوس معزولة. $G$: مخطط بياني بسيط. لا يوجد حرف $e_1$ .

٤–٥ أ)




ب) $n(n-1)/2$

ج) $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, V_2 = \{v_5, v_6, v_7\}.$




٤–٦ أ) مخطط ثنائي الفرع. $V_1 = \{v_1, v_2, v_5\}, V_2 = \{v_3, v_4\}$

ب) مخطط ثنائي الفرع.

$V_1 = \{v_1, v_3, v_4, v_6, v_8, v_9, v_{10}\}, V_2 = \{v_2, v_5, v_7\}$

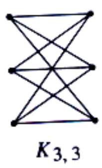
ج) مخطط ثنائي الفرع.

$V_1 = \{G, B, S, D, M\}, V_2 = \{H, W, C, I, L\}.$

د) ، هـ) ، و) ليست مخططات ثنائية الفرع.

ز) مخطط ثنائي الفرع. $V_1 = \{v_1\}, V_2 = \{v_2, v_3\}$

٤–٧ أ) ب)

٤-٨ m n

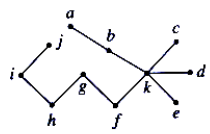
٤-٩ مخطط مثال ٤-٨ ثنائي الفرع ، بينما مخططا مثالي ٤-٩ ، ٤-١٠ ليسا ثنائيي الفرع. المخطط $K_1$ في مثال ٤-١٠ ليس ثنائي الفرع لأنه من المستحيل تجزئة مجموعة الرؤوس إلى مجموعتين جزئيتين غير خاليتين.

٤-١٠ أ) (b, c, a, d, e)

ب) (c, a, b, e, d)

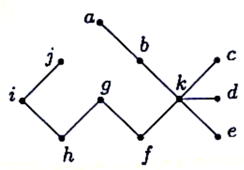
ج) (a, c, d, e, b)

٤-١١ أ)

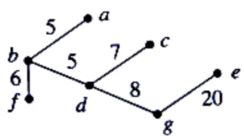



ب) 5

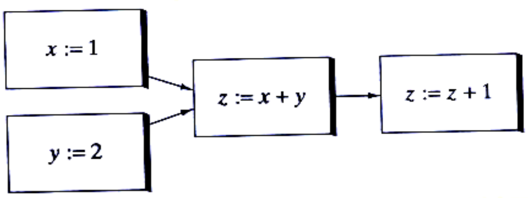
ج)



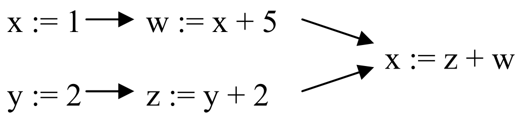

٤-١٢



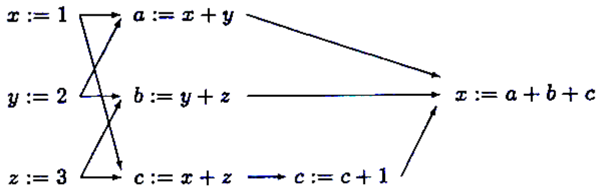

٤-١٣ أ)



ب)




ج)

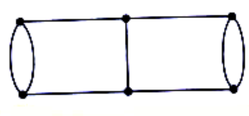



**ثانيا: المسارات والدورات:**

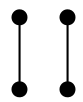
١٤-٤

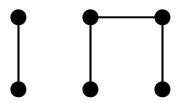
| | مسار بسيط | دورة | دورة بسيطة |
|---|---|---|---|
| أ) | لا | نعم | نعم |
| ب) | نعم | لا | لا |
| ج) | لا | لا | لا |
| د) | لا | نعم | نعم |
| هـ) | لا | لا | لا |
| و) | لا | نعم | لا |
| ز) | نعم | لا | لا |
| ح) | نعم | لا | لا |
| ط) | نعم | لا | لا |

١٥-٤ أ)



ب) لا يوجد مثل هذا المخطط لأن هناك دائما عددا زوجيا من الرؤوس ذوات الدرجة الفردية.

ج) 

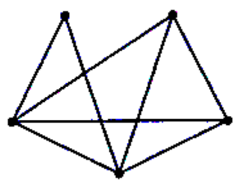
د) 

هـ) لا يوجد مثل هذا المخطط لأن نصف مجموع درجات الرؤوس (= عدد الأحرف) يساوي 5 = 2/(1+2+3+4) وليس 4.

و)

ز) نفرض أنه يوجد مثل هذا المخطط ، وأن رؤوسه هي a, b, c, d, e, f. ونفرض أن درجة كل من a, b تساوي 5. ونظرا لأن المخطط بسيط فيجب أن تكون درجة كل من c, d, e, f مساوية 2 على الأقل ، وبالتالي لا يوجد مثل هذا المخطط.

ح)

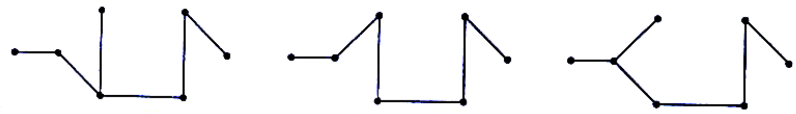


ط) لا يوجد مثل هذا المخطط. نفرض – بطريق التناقض – أنه يوجد مثل هذا المخطط ، وأن درجة كل من رأسيه a, b تساوي 2 ، ودرجة كل من رؤوسه c, d, e تساوي 4. حيث أن درجة c تساوي 4 فهي تلاقي (incident on) (أحرفا تمس / تلاقي كلا من) a, b, d, e. وبالمثل فإن d تلاقي (أحرفا تلاقي) a, b, c, e ، وكذلك e تلاقي (أحرفا تلاقي) a, b, c, d. معنى هذا أن درجة a تساوي 3 على الأقل ، وهذا تناقض.

٤-١٦ أ) (a, a), (b, c, g, b), (b, c, d, f, g, b),
(b, c, d, e, f, g, b), (c, g, f, d, c),
(c, g, f, e, d, c), (d, f, e, d)

ب) (a, b, c, d, e), (a, b, c, d, f, e), (a, b, c, g, f, e),
(a, b, c, g, f, d, e), (a, b, g, f, e), (a, b, g, c, d, e),
(a, b, g, f, d, e), (a, b, g, c, d, f, e)

٤-١٧



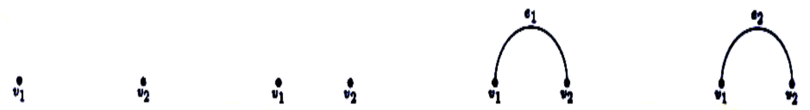
**المخطط الجزئي الأوسط مسار بسيط. ولا يُعَدُّ أي من هذه المخططات الجزئية دورة أو دورة بسيطة.**

٤-١٨ أ) **درجة أي رأس تساوي 4.**

ب) $\delta(v_1) = 2, \delta(v_2) = 2, \delta(v_3) = 3, \delta(v_4) = 6, \delta(v_5) =$
$2, \delta(v_6) = 3, \delta(v_7) = 4, \delta(v_8) = 4, \delta(v_9) = 4, \delta(v_{10}) = 2$

٤-١٩ أ) $G_1 = (\{v_1\}, \phi)$
$G_2 = (\{v_2\}, \phi)$
$G_3 = (\{v_1, v_2\}, \phi)$
$G_4 = (\{v_1, v_2\}, \{e_1\})$

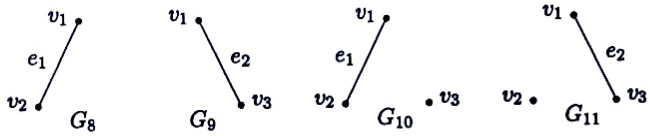
ب) **هناك 6 مخططات جزئية: المخططات الجزئية الخمسة التالية، والمخطط البياني الأصلي نفسه.**




ج) i) **المخططات الجزئية بدون أي أحرف هي:**

$G_1 = (\{v_1\}, \phi), G_2 = (\{v_2\}, \phi), G_3 = (\{v_3\}, \phi),$
$G_4 = (\{v_1, v_2\}, \phi), G_5 = (\{v_1, v_3\}, \phi),$
$G_6 = (\{v_2, v_3\}, \phi), G_7 = (\{v_1, v_2, v_3\}, \phi).$

ii) **المخططات الجزئية الأخرى هي:**




**والمخطط البياني G نفسه.**

د) **يوجد 17 مخطط بياني جزئي.**

٤-٢٠ أ) **لا يحتوي المخطط على دورة أويلر.**

ب) $(v_1, v_5, v_2, v_4, v_5, v_3, v_2, v_1, v_4, v_3, v_1)$

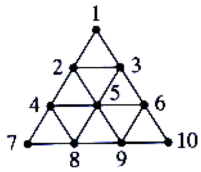
ج) **لا يحتوي المخطط على دورة أويلر لأن هناك رؤوسا فردية الدرجة.**

د) **لا يحتوي المخطط على دورة أويلر.**

هـ) (a, b, d, c, b, f, g, j, f, e, j, h, c, i, d, e, i, h, a)

و) (a, b, c, b, d, e, h, f, i, j, k, i, h, g, f, e, g, d, c, a)

٤-٢١ **المخطط البياني**




**يحتوي على دورة أويلر التالية**

(10, 9, 6, 5, 9, 8, 5, 4, 8, 7, 4, 2, 5, 3, 2, 1)

**ويمكن تعميم هذه الطريقة للحصول على دورة أويلر.**

٤-٢٢ أ) **عندما تكون n فردية.**

ب) **يجب أن تكون كل من m, n زوجية.**

ج) $m = n = 1$ أو $m = n = 2$

٤-٢٣ أ) $d, e$ هما الرأسان الوحيدان ذوا الدرجة الفردية ، و2 عدد زوجي.

ب) يوجد 4 رؤوس فردية الدرجة ، و4 عدد زوجي.

٤-٢٤ (d, a, b, d, e, b, c, e, h, g, d, f, g, j, h, i, e)

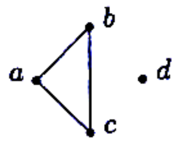
٤-٢٥ أ) البرهان شبيه ببرهان نظرية ٤-٤.

ب) (b, c, d, g, b, a, f, g, i, f); (c, h, e)

ج) نفرض أن G مخطط بياني متصل يحتوي على عدد n من الرؤوس فردية الدرجة $v_1, \cdots, v_n$ . هناك مسارات لا تحتوي على أي أحرف مكررة من $v_1$ إلى $v_2$ ، ومن $v_3$ إلى $v_4$ ، ... ، وهكذا بحيث أن أي حرف في G يقع في مسار واحد بالضبط من هذه المسارات.

٤-٢٦ أ) صحيح. بالنسبة لأي a مكررة في المسار
(..., a, ..., b, a, ...)
احذف a, ..., b.

ب) خاطئ. مثال مناقض: في المخطط البياني




الدورة (a, b, c, a) تشمل جميع الأحرف ، ولكنها ليست دورة أويلر حيث أنها لا تشمل الرأس d.

٤-٢٧ نفرض أن $e = (v, w)$ حرف في دورة في المخطط المتصل G. بناءً على ذلك هناك مسار P من v إلى w لا يشتمل على الحرف e. نفرض أن x, y رأسان في G-{e}. نظراً لأن G متصل ، فهناك مسار $P'$ في G من v إلى w.

ضع بدلا من أي وجود/حدوث (occurrence) للحرف e في المسار $P'$ المسار P. المسار الناتج (resulting path) من v إلى w يقع في $G - \{e\}$. ولذلك فإن $G - \{e\}$ متصل. أي أن G يظل متصلا بعد حذف الحرف e.

٤-٢٨ المخطط البياني في السؤال ٤-١٩-ج.

٤-٢٩ اتحاد (union) جميع المخططات البيانية الجزئية المتصلة التي تحتوي على $G'$ (all connected subgraphs containing) يُعَدُّ مركبة (component).

٤-٣٠ نفرض أن H هو أحد المخططات الجزئية المتصلة في التجزئة. ونفرض أن v رأس في H ، وأن C هي المركبة التي تنتمي إليها v. سنثبت بإذن الله أن $H = C$:

i) نفرض أن w رأس في H. وحيث أن H مخطط متصل ، فلذلك يوجد مسار من v إلى w في H. وبناءً عليه فإن w تقع في C.

ii) الآن نفرض أن w رأس في C. معنى ذلك أنه يوجد مسار من v إلى w

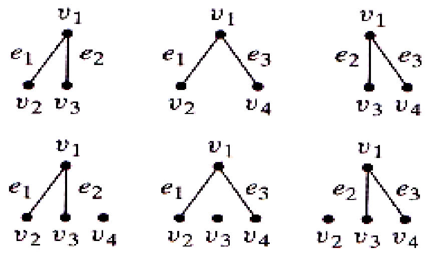
$$(v_0, v_1, \cdots, v_n)$$

حيث $v_0 = v_1$ ، $v_n = w$ في C. الحرف $(v_0, v_1)$ يجب أن ينتمي إلى H لأن الرأس $v_0$ تقع في H. وهكذا فإن الرأس $v_1$ تقع في H. واستمرارا بهذه الكيفية سنصل إلى النتيجة أن w تقع في H.

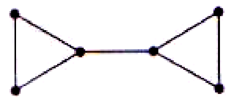
من (i)، (ii) نرى أن مجموعتي رؤوس H, C (vertex sets of) متساويتان. وبالمثل فإن مجموعتي أحرف H, C (edges sets of) متساويتان. وبالتالي فإن المخططات الجزئية للتجزئة مركبات.

٤-٣١ يوجد مسار P من v إلى w. غيِّر اتجاه (orientation) كل حرف (edge) في المسار P.

٤-٣٢




٤-٣٣ أ)



ب) $K_6$

**٤-٣٤ عدِّل برهانَيْ نظريتي ٤-١ و ٤-٢.**

**٤-٣٥ ب) إذا كانت**

$$(b_1^{(1)}b_2^{(1)}\cdots b_{n-1}^{(1)}, b_1^{(2)}b_2^{(2)}\cdots b_{n-1}^{(2)}, \cdots)$$

**هي دورة أويلر موجَّهة في** G (a directed Euler cycle in G)

**فإن**

$$b_1^{(1)}b_2^{(1)}\cdots b_{n-1}^{(1)}b_{n-1}^{(2)}b_{n-1}^{(3)}\cdots$$

**هي متتابعة دي بروجن** (a de Bruijn sequence)

**ج) استخدم نتيجتي السؤالين ٤-٣٤ و ٤-٣٥- ب.**

**٤-٣٦** $n(n-1)^k$

**[اختر** $(v_0, v_1, \cdots, v_k)$ **حيث** $v_{i-1} \neq v_i$ ]

**٤-٣٧ i) نحسب أولا عدد المسارات**

$$(v_0, v_1, \cdots, v_k)$$

**التي طول أي منها يساوي** $k$ **، حيث** $k \geq 1$.

**أول رأس** $v_0$ **يمكن اختيارها بعدد** $n$ **من الطرق. وكل رأس تالية** (subsequent vertex) **يمكن اختيارها بعدد** (n-1) **من الطرق [لأنها يجب أن تكون مختلفة عن سابقتها** (predecessor)**]. وبالتالي فإن عدد المسارات التي طول أي منها** $k$ **هو:** $n(n-1)^k$.

ii) **بناء على ذلك فإن العدد الكلي للمسارات التي طول أي منها** $k$ **للقيم** $k = 1, 2, \cdots, n$ **أي للقيم** $1 \leq k \leq n$ **هو**

$$\sum_{k=1}^{n} n(n-1)^k = n(n-1)\frac{(n-1)^k - 1}{(n-1)-1}$$

$$= \frac{n(n-1)[(n-1)^k - 1]}{n-2}$$

**٤-٣٨ أ)** $$p_m = (n-1)^{m-1} - p_{m-1}$$

**الحد الأول** $(n-1)^{m-1}$ **يحسب عدد المسارات التي طول أي منها** $(m-1)$ **والتي تبدأ بالرأس** $v$. **والحد الثاني** $p_{m-1}$ **يحسب عدد المسارات التي طول أي منها** (m-1) **والتي تبدأ بالرأس** $v$ **وتنتهي بالرأس** $w$. **وبالنسبة للمسار الذي طوله** (m-1) **والذي يبدأ بالرأس** $v$ **ولا ينتهي بالرأس** $w$ **فمن الممكن أن نمده** (extend it) **إلى مسار طوله** $m$ **يبدأ بالرأس** $v$ **وينتهي بالرأس** $w$.

**ب)**

$$\begin{aligned} p_m &= (n-1)^{m-1} - [(n-1)^{m-2} - p_{m-2}] \\ &= (n-1)^{m-1} - (n-1)^{m-2} + p_{m-2} \\ &\vdots \\ &= (n-1)^{m-1} - (n-1)^{m-2} + \cdots + (-1)^m (n-1) \\ &\qquad + (-1)^{m+1} p_1 \end{aligned}$$

$$= (n-1)^{m-1} - (n-1)^{m-2} + \cdots + (-1)^{m}(n-1) + (-1)^{m+1}$$

$$= \frac{-(n-1)^{m} - (-1)^{m+1}}{-(n-1)-1}$$

$$= \frac{(n-1)^{m} + (-1)^{m+1}}{n}$$

**٤-٣٩ .) هناك مسار واحد طوله** 1 **، وهو** $(v, w)$ **، من** v **إلى** w.

**.) هناك** (n-2) **مسار طوله** 2 **، وهو** $(v, x_1, w)$ **، من** v **إلى** w **، وذلك لأن الرأس** $x_1$ **يمكن أن نختارها بعدد** (n-2) **من الطرق. [الرأس** $x_1$ **يجب أن تكون مختلفة عن كل من** v, w**].**

**.) هناك** (n-3) (n-2) **مسار طوله** 3 **، وهو** $(v, x_1, x_2, w)$ **، من** v **إلى** w **، وذلك لأن الرأس** $x_1$ **يمكن أن نختارها بعدد** (n-2) **من الطرق ، والرأس** $x_2$ **يمكن أن نختارها بعدد** (n-3) **من الطرق. [الرأس** $x_1$ **يجب أن تكون مختلفة عن كل من** v, w**].**

**.) عموما هناك** $(n-k)\ldots(n-3)(n-2)$ **مسار طوله** k **، وهو** $(v, x_1, \cdots, x_{k-1}, w)$ **، من** v **إلى** w **، وذلك لأن الرأس** $x_1$ **يمكن أن نختارها بعدد** (n-2) **من الطرق ، والرأس** $x_2$ **يمكن أن نختارها بعدد** (n-3) **من الطرق ، وهكذا. وبالتالي نحصل على النتيجة المطلوبة.**

**٤-٤٠ .) عدد المسارات البسيطة التي طولها** 0 **يساوي** n.

**.) وعدد المسارات البسيطة التي طولها** 1 **يساوي** n(n-1).

**.) وعدد المسارات البسيطة التي طولها** 2 **يساوي** n(n-1)(n-2).

**وهكذا ..**

**وبالتالي فإن العدد الإجمالي للمسارات البسيطة يساوي**

$$n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n(n-1)\cdots 1 =$$

$$n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

وحيث أن

$$n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = n!\left(e - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!}\right)$$

$$= n!e - 1 - n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

وكذلك بالنسبة للقيم $n \geq 2$

$$n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n-1} \leq 1$$

فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة للقيم $n \geq 2$. وأما بالنسبة للقيمة $n = 1$ فإننا نرى أن النتيجة صحيحة بالتحقيق المباشر.

٤-٤١ (i) إذا كانت v رأسا في V فإن المسار الذي يتكون من v وليس فيه أ ي حرف (no edges) يُعَدُّ مسارا من v إلى v. وهكذا فإن العلاقة vRv تتحقق لجميع الرؤوس v في V ، أي أن R انعكاسية.

(ii) نفرض أن vRw. أي أن هناك مسارا $(v_0, \cdots, v_n)$ حيث $v_0 = v, v_n = w$. والآن $(v_n, \cdots, v_0)$ مسار من w إلى v ، وبالتالي wRv ، أي أن R متناظرة.

(iii) نفرض أن vRw, wRx. معنى هذا أنه يوجد مسار $P_1$ من v إلى w ، ومسار $P_2$ من w إلى x. والآن $P_1$ يتبعه $P_2$ يُعَدُّ مسارا من v إلى x ، وهكذا فإن vRx ، أي أن R متعدية.

**وحيث أن R انعكاسية ومتناظرة ومتعدية على V ، فإن R علاقة تكافؤ على V.**

٤-٤٢ (i) **المخطط البياني المتصل الذي فيه رأس واحدة يتكون من هذه الرأس – ولتكن v – فقط أو يضاف لها عروة أو أكثر تلاقي / واقعة على** (loops incident on)v**. ودورة أويلر تتكون من دورة** (cycle) **تجتاز** (traverses) **كل عروة مرة واحدة.**

ii) **المخطط البياني المتصل الذي فيه رأسان – v, w مثلا – درجة كل منهما زوجية يتكون فقط من 2k من الأحرف** (edges) **التي تلاقي الرأسين v, w (حيث $k \geq 1$ ) ، أو يضاف لها عروة أو أكثر واقعة على v ، أو عروة أو أكثر واقعة على w. ودورة أويلر تتكون من مسار يبدأ عند v ، ويجتاز جميع العُرَى الواقعة على v ، ويجتاز حرفا واحدا من v إلى w ، ويجتاز جميع العُرَى الواقعة على w ، ويجتاز حرفا واحدا من w إلى v , ثم يجتاز جميع الأحرف المتبقية التي تلاقي v, w. وهذا المسار سينتهي عند v لأنه يوجد عدد زوجي من الأحرف التي تلاقي v, w.**

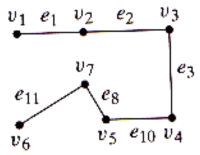
٤-٤٣ أ) 2

ب) 1 ، **وذلك لأن** dist(v, w) = 1 **لكل زوج من رؤوس** $K_n$ **المختلفة.**

٤-٤٤ **نفرض أن كل رأس في المخطط لها حرف خارج منها. اختر رأسا** $v_0$ **. تَتَبَّع** (follow) **حرفا خارجا من** $v_0$ **إلى رأسٍ ما ولتكن** $v_1$ **[فرضا: مثل هذا الحرف موجود]. استمر في تَتَبُّع حرف خارج من الرأس** $v_i$ **إلى رأس** $v_{i+1}$ **. وحيث أنه يوجد عدد محدود من الرؤوس ، فسنعود حتما في النهاية إلى رأس زرناها سابقا. وعندها سنكون قد اكتشفنا وجود دورة** (cycle) **، وهذا تناقض. معنى ذلك أن أي مخطط موجَّه لا دَوْرَوِي** dag **يحتوي على الأقل على رأس واحدة ليس لها أي أحرف خارجة منها.**

٤-٤٥ أ) دورة (cycle)

ب)




٤-٤٦ لا ، لأن هناك رؤوسا فردية الدرجة.

**ثالثا: الأشجار**

٤-٤٧ أ) المخطط البياني شجرة. لأي رأسين v, w يوجد مسار بسيط وحيد من v إلى w.

ب) المخطط البياني ليس شجرة ، لأنه يوجد مساران بسيطان من الرأس "v" العلوية اليسرى (upper left vertex) إلى الرأس "w" السفلية الوسطى (bottom middle vertex).

ج) المخطط البياني ليس شجرة ، لأنه لا يوجد أي مسار بسيط من الرأس "v" الوسطى اليسرى (left middle vertex) إلى الرأس "w" السفلى اليسرى (left bottom vertex).

د) المخطط البياني شجرة. لأي رأسين v, w يوجد مسار بسيط وحيد من v إلى w.

٤-٤٨ أ) إذا كان m أو n أو كلاهما مساويا 1.

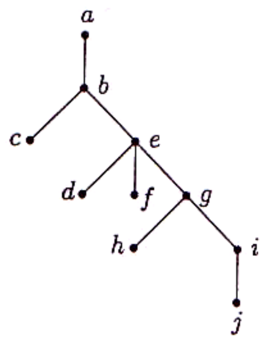
ب) n = 1, 2.

٤-٤٩ أ) a:1 b:1 c:1 d:1
e:2 f:3 g:3 h:4
i:2 j:3 k:0

ب) 4

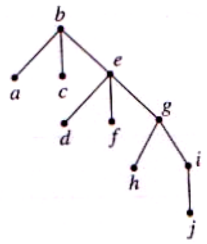
٤-٥٠

أ)




الارتفاع = 5

ب)




الارتفاع = 4

٤-٥١ أ) i) PEN ii) LAP

iii) DEAL iv) SALAD

ب) i) 0111100010

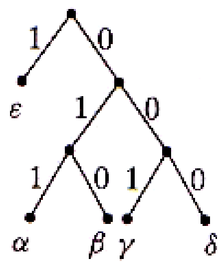
ii) 010000001111

iii) 0111000100111100010

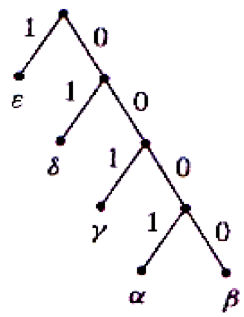
iv) 0110000100100001111

٤-٥٢

أ)

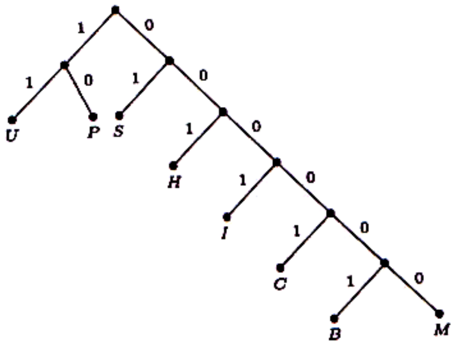



ب)

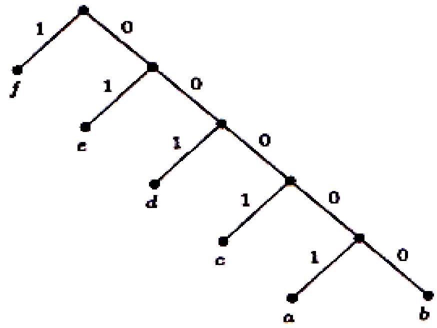



شجرة أخرى مبينة في حل الجزء أ) من السؤال.

٤-٥٣ أ)




٤-٥٤




**٤-٥٥ الشـفرة المقترحـة مبهمـة** (ambiguous)**. مـثلا:** 01 **يمكـن أن تمثـل** C(represent) **أو** EA.

**٤-٥٦ أ)** **أي رأس طرفية** (a terminal vertex) **درجتها** 1.

**ب)** **نفرض أن** T **شجرة. اجعل أي رأس اختيارية فيها جذرا. نفرض أن** V **هـي مجموعـة الـرؤوس الـتي تقـع في المسـتويات الزوجيـة** (even levels) **، وأن** W **هـي مجموعـة الـرؤوس الـتي تقـع في المسـتويات الفردية** (odd levels)**. نظرا لأن أي حرف** (edge) **يلاقي** (incident on) **رأسـا في** V **ورأسـا في** W **، فلـذلك** T **تُعَدُّ مخططـا بيانيـا ثنـائي الفرع.**

ج) نفرض أن T شجرة نجعل لها جذرا. لوِّن الرؤوس التي تقع في المستويات الزوجية بلون ، ولوِّن الرؤوس التي تقع في المستويات الفردية بلون آخر.

٤–٥٧ أ) a:5 b:4 c:5 d:4 e:3
f:4 g:3 h:4 i:4 j:5

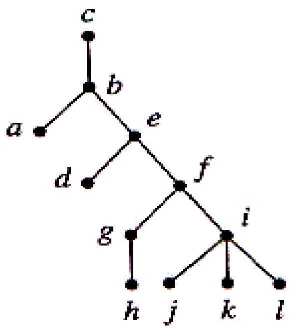
ب) e, g

ج) نصف قطر (radius) شجرة T هو الاختلاف المركزي لمركز فيها (the eccentricity of a center). ليس من الضروري أن تكون العلاقة 2r = d صحيحة دائما (انظر شجرة مثال ٤–٢٣).

٤–٥٨ في الشجرة التالية


(a, b), (a, b, a, b) مساران مختلفان (distinct paths) من a إلى b.

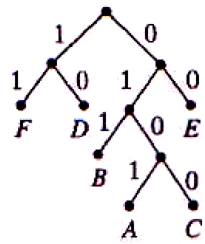
٤–٥٩ أ)




ب) a:2 b:1 c:0 d:3
e:2 f:3 g:4 h:5
i:4 j:5 k:5 l:5

ج) 5

٤-٦٠

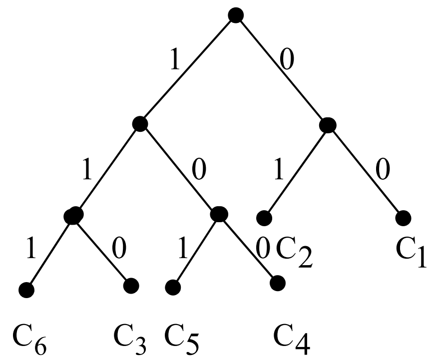



٤-٦١ (i) **لاحظ أننا سنرتب الاحتمالات أولا تنازليا:**

| i | 1 | 2 | 4 | 5 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0.34 | 0.30 | 0.12 | 0.10 | 0.08 | 0.06 |
| $\ell_i$ | 7 | 8 | 8 | 9 | 11 | 12 |

**نلاحظ مع تناقص $p_i$ أن $\ell_i$ متزايدة ، أي أن الشرط المعطَى متحقق.**

(ii




٤-٦٢ (١) **في الشفرة القياسية:**

| أ | ل | ح | ي | أ | ء |
|---|---|---|---|---|---|
| 01101000 | 01100111 | 01110000 | 01100100 | 01101000 | 01111000 |

**في الشفرة المتراصة (هوفمان)**

| أ | ل | ح | ي | أ | ء |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 010 | 101111 | 1010 | 100 | 01101011 |

**نلاحظ أن كلمة "الحياء" تحتاج إلى $48(=8\times6)$ رمز ثنائي في الشفرة القياسية ، بينما في الشفرة المتراصة تحتاج إلى 27 رمز ثنائي فقط.**

(٢) حديث " الحياء خير كله" يحتاج إلى $96 (= 8 \times 12)$ رمز ثنائي في الشفرة القياسية ، بينما في الشفرة المتراصة يحتاج إلى

الحياء خير كله

56[=27 + (5+4+7) + (5+3+5)] رمز ثنائي فقط

النسبة بين عدد الرموز الثنائية في الشفرة المتراصة إلى عددها في الشفرة القياسية تساوي

$$56/96 = 0.5833 = 58.33\%$$

أي أن استخدام الشفرة المتراصة (شفرة هوفمان) يؤدي إلى توفير أكثر من 40% من الحيِّز المستخدم لتخزين النص.

٤-٦٣ (i) أ) محمد المهدي

ب) هارون الرشيد ، محمد المهدي ، عبد الله المنصور

ج) محمد الأمين ، عبد الله المأمون ، القاسم المؤتمن ، محمد المعتصم

د) هارون الرشيد ، موسى الهادي ، محمد الأمين ، عبد الله المأمون ، القاسم المؤتمن ، محمد المعتصم ، العباس

هـ) موسى الهادي

(ii) عبد الله المأمون

العباس

٤-٦٤ (i) أ) والد b : c ، ووالد d : h

ب) سلف b, a : c ، وسلف e, c, b, a : j

ج) أبناء h, i : d ، وأبناء j : e

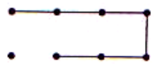
د) سلالة e, f, g, j : c ، وسلالة j : e

هـ) إخوة e, g : f ، وإخوة i : h

و) الرؤوس الطرفية : j, f, g, h, i

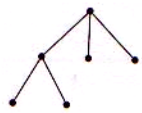
ز) **الرؤوس الداخلية :** a, b, c, d, e

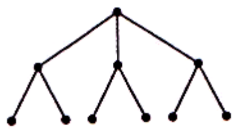
(ii) أ)  **ب)** 

**٤-٦٦ أ)** 

**ب)** 

**ج) لا يوجد مثل هذا المخطط ، لأن درجة أي رأس طرفيه تساوي** 1.

**د)** 

**هـ)** 

**٤-٦٧ أ) أي رأس منفردة** (a single vertex) **تُعَدُّ دورة** "cycle" **طولها صفر.**

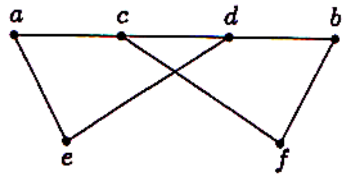
**ب) في هذه الحالة إذا كان الحرف هو** (v, w) **فسيكون لدينا الدورة** (v, w, v).

**٤-٦٨ المخطط البياني المعطَى ليس شجرة لأنه بناء على التعريف الشجرة هي مخطط بياني بسيط يحقق الشرط: إذا كانت** v, w **رأسين فهناك مسار بسيط وحيد من** v **إلى** w.

**٤-٦٩ أ) كل مركبة** (component) **من مركبات الغابة متصلة** (connected) **ولا دَوْرَوِية** (acyclic) **ولذلك فهي شجرة.**

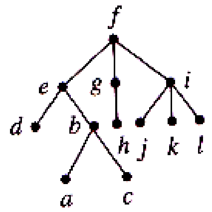
**ب)** n - m

**٤-٧٠ لا ليس بالضرورة أن يكون دورة. انظر مثلا المسارين البسيطين** (a, c, d, b), (a, e, d, c, f, b) **في المخطط البياني التالي**




**٤-٧١ نفرض أن G مخطط بياني متصل. أضف أحرفا متوازية** (parallel edges) **حتى يكون عدد أحرف المخطط البياني الناتج *G مساويا** (n-1) **حرفا. نظرا لأن *G متصل وعدد أحرفه** (n-1) **فبنظرية ٤-٦ نرى أن المخطط *G لا دَوْرَوِي. ولكن إضافة حرف على التوازي** (adding an edge in parallel) **يؤدي إلى الحصول على دورة ، وهذا تناقض.**

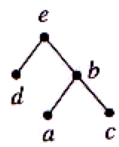
**٤-٧٢**




**أ)** b **ب)** a, c

**ج)** d, a, c, h, j, k, l

**د)**



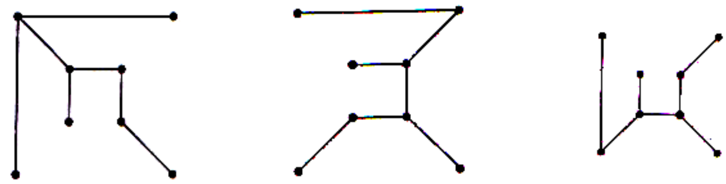

**٤-٧٣ أ) صحيحة ، انظر نظرية ٤-٦.**

**ب) صحيحة ، الشجرة التي ارتفاعها 6 أو أكثر يجب أن تحتوي على 7 رؤوس أو أكثر.**

**ج) خاطئة.**

**رابعا: الأشجار المولِّدة**

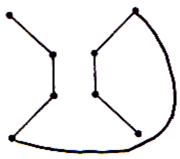
**٤-٧٤**

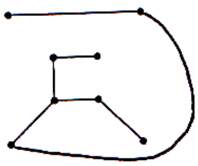


(ج) (ب) (أ)

**٤-٧٥ أ)** **المسار** (h, f, e, g, b, d, c, a)

**ب)** **ج)**





**٤-٧٦ أ)**

**ب)** **الدورة** (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l)

**ج)**

**٤-٧٧ أ)** **إذا كانت** T **شجرة فإن أي ترتيب للرؤوس** (vertex ordering) **له الرأس الابتدائية نفسها** (same initial vertex) **يؤدي إلى الحصول على الشجرة المولِّدة نفسها** (same spanning tree) **وهي الشجرة** T **نفسها** (T itself).

ب) إذا كانت T شجرة فإن أي ترتيب للرؤوس له الرأس الابتدائية نفسها يؤدي إلى الحصول على الشجرة المولدة نفسها وهي الشجرة T نفسها.

٤-٧٨ الشرط: إذا لم تحتو الحرف أي دورة في G. (edge is not contained in a cycle of G).

٤-٧٩ نفرض أن x حرف يلاقي الرأسين a, b. حذف x من T يؤدي إلى الحصول على مخطط منفصل (غير متصل) (disconnected graph) له مركبتان U, V. الرأسان a, b تنتميان إلى مركبتين مختلفتين. نفرض أن $a \in U, b \in V$. يوجد مسار P من a إلى b في $T'$. وعندما نتحرك عبر المسار P فإننا – عند نقطة ما – سنلاقي حرفا $y = (v, w)$ حيث $v \in U, w \in V$. وحيث أن إضافة y إلى $T - \{x\}$ يؤدي إلى الحصول على مخطط بياني متصل، فإن $(T - \{x\})U\{y\}$ تُعَدُّ شجرة مولِّدة. ومن الواضح أن $(T' - \{y\})U\{x\}$ شجرة مولِّدة.

٤-٨٠ المدخلات: مخطط بياني متصل G رؤوسه مرتبة (ordered) $v_1, v_2, \cdots, v_n$، و d.

المخرجات: $d(v_i)$ = طول أقصر مسار من $v_1$ إلى $v_i$.

$d(v_i)$ = length of a shortest path from $v_1$ to $v_i$

```
procedure short_paths(V, E, d)
   S := (v1)
   V' := set consisting of v1
   E' := φ
   d(v1) := 0
   while true do
      begin
      for each x ∈ S, in order, do
         for each y ∈ V-V', in order, do
            if (x, y) is an edge then
               begin
               add edge (x, y) to E' and y to V'
```

```
            d(y) := d(x) + 1
            end
        if no edges were added then
            return(T)
        S := children of S ordered consistently with the original
                                                    vertex ordering
        end
end short_paths
```

٤-٨١ نفرض أن عدد رؤوس T يساوي n. إذا أضيف حرف إلى T فإن المخطط الناتج 'T سيكون متصلا. وإذا كان 'T لا دَوْرَوِيا فإنه سيكون شجرة ذات n حرف و n رأس. وبالتالي فإنه 'T يحتوي على دورة (a cycle). وإذا احتوى 'T على دورتين أو أكثر فإنه سيمكننا حينئذ الحصول على مخطط بياني متصل "T عن طريق حذف (deleting) حرفين أو أكثر من 'T. ولكن حينئذ سيكون "T شجرة ذات n رأس وعدد من الأحرف أقل من (n-1) ، وهذا مستحيل.

٤-٨٢ أ) المدخلات: مخطط بياني G = (V, E) عدد رؤوسه n.

المخرجات: true إذا كان G متصلا (connected).

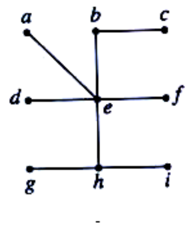
false إذا كان G غير متصل (not connected).

```
procedure is connected(V, E)
    T := bfs(V, E)
    // T = (V', E') is the
    // spanning tree returned by bfs
    if |V'| = n then
        return(true)
    else
        return(false)
end is connected
```

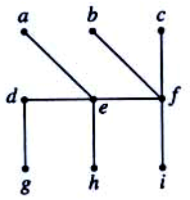
ب) في الخوارزمية السابقة المكتوبة في أ) ضع dfs بدلا من bfs.

٤-٨٣ أ)

(i)

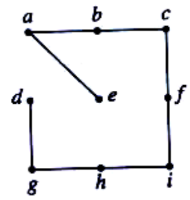



(ii)

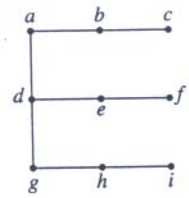



ب)

(i)




(ii)




**خامسا: الأشجار المولِّدة الدنيا**

**٤-٨٤**

(أ)

(ب)

(ج)

(د)

(هـ)

**٤-٨٥ إذا كانت v هي أول رأس تختبرها خوارزمية بريم ، فإن الحرف e ستحتويه الشجرة المولِّدة الدنيا التي تنشئها الخوارزمية.**

**٤-٨٦ نعم**

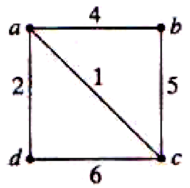
٤-٨٧ نفرض أن وزن أي حرف في $K_n$ يساوي 2. ونفرض أن خوارزميةً ما لا تختبر (لا تزور) الحرف e. نفرض أن T ترمز إلى الشجرة المولدة الدنيا التي تنشئها الخوارزمية. إذا كان الحرف e في T فغيِّر المدخلات (alter the input) بتغيير وزن e إلى 3. وإذا لم يكن e في T فغيِّر المدخلات بتغيير وزن e إلى 1. أعد تشغيل الخوارزمية (rerun the algorithm). لاحظ أنه نظرا لأن الخوارزمية لا تختبر الحرف e فستظل تنشئ / تُخرج T (output) ، إلا أن T – بالنسبة للمدخلات المعدلة (modified input) – ليست شجرة مولدة دنيا ، وهذا تناقض. ولذلك فإن أي خوارزمية لإنشاء / لإيجاد شجرة مولدة دنيا يجب أن تختبر جميع الأحرف في $K_n$.

٤-٨٨ نفرض أن G له شجرة مولدة دنيا $T_1$ وأخرى $T_2$ . معنى ذلك أنه يوجد حرف x في $T_1$ وغير موجود في $T_2$. بناء على النتيجة المذكورة في السؤال ٤-٧٩ يوجد حرف y في $T_2$ وغير موجود في $T_1$ بحيث أن

$$T_3 = (T_1 - \{x\})U\{y\}, \quad T_4 = (T_2 - \{y\})U\{x\}$$

شجرتان مولدتان (spanning trees). ونظرا لأن x, y لهما وزنان مختلفان ، فإن $T_3$ أو $T_4$ لها وزن أقل من $T_1$ ، وهذا تناقض.

٤-٨٩ أ) خاطئة. مثال مناقض:




ب) صحيحة.

ج) خاطئة. مثال مناقض: المخطط البياني $K_5$ حيث وزن كل حرف يساوي 1.

٤-٩٠ البرهان شبيه ببرهان نظرية ٤-٨. نفرض أن $G_i$ هو المخطط البياني الناتج (produced) في الخطوة / التكرير (iteration) رقم i. استخدم الاستقراء لإثبات أن $G_i$ يحتوي على شجرة مولِّدة دنيا.

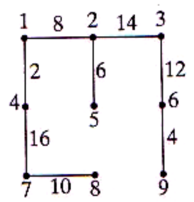
٤-٩١ في السطر رقم 7 ضع $-\infty$ بدلا من $\infty$.
وفي السطر رقم 11 ضع $<$ بدلا من $>$.

٤-٩٢ أ) المدخلات: مجموعة أحرف "E" مخطط بياني متصل موزون (connected weighted graph) عدد رؤوسه n. إذا كان e حرفا فإن w(e) تساوي وزن e (weight of). وإذا لم يكن e حرفا فإن w(e) تساوي $\infty$ (قيمة أكبر من أي وزن فعلي (actual weight)).
المخرجات: شجرة مولدة دنيا.

```
procedure kruskal(E, w, n)
   V' := ϕ
   E' := ϕ
   T' := (V', E')
   while |E'| < n-1 do
      begin
      among all edges that if added to T'
         would not complete a cycle, choose
         e = (vi, vj) of minimum weight
      E' := E' U {e}
      V' := V' U {vi, vj}
      T' := (V', E')
      end
   return(T')
end kruskal
```

ب) بالنسبة للمخطط البياني في السؤال ٤-٨٤-أ: إذا قطعنا الروابط (break ties) بانتقاء أصغر رؤوس (picking the smallest vertices)، فإن خوارزمية كرسكال تنتقي (picks) – على الترتيب –
(2, 3), (3, 5), (3, 4), (1, 2)

٤-٩٣ أ)

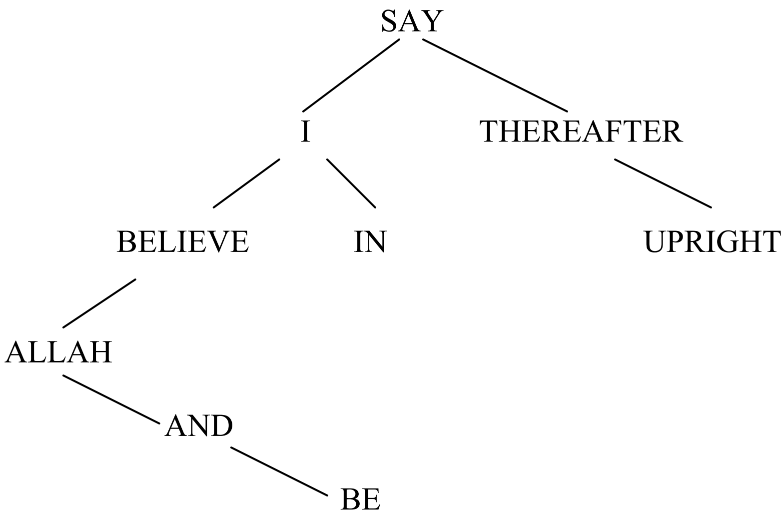



ب) (1, 4), (1, 2), (2, 5), (2, 3), (3, 6), (6, 9), (4, 7), (7, 8)

ج) (6, 9), (3, 6), (2, 3), (2, 5), (1, 2), (1, 4), (4, 7), (7, 8)

**سادسا: الأشجار الثنائية**

**٤-٩٤**




**٤-٩٥ المدخلات: جذر شجرة بحث ثنائية عدد رؤوسها** n **:**root

**القيمة المطلوب البحث عنها.** :key

.n

**المخرجات: الرأس التي تحتوي على** key **، أو** null **إذا لم تكن** key **في الشجرة.**

```
procedure bst_search(root, n, key)
    ptr := root
    while ptr ≠ null do
        if ptr contains key then
```

```
        return(ptr)
    else if ptr contains a value greater than key then
        ptr := left child of ptr
    else
        ptr := right child of ptr
  return(null)
end bst_search
```

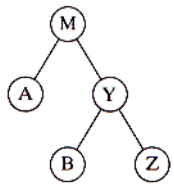
**٤-٩٦ المدخلات:** $s_1, s_2, \cdots, s_n; n$

**المخرجات: شجرة بحث ثنائية** T **ارتفاعها أقل ما يمكن** (of minimum height) **تقوم بتخزين المدخلات.**

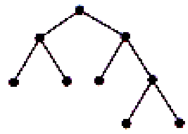
```
procedure optimal_bst(s, n)
  sort s_1, ..., s_n
  return(o_bst(s, 1, n))
end optimal_bst

procedure o_bst(s, i, j)
  if i > j then
      return(null)
  m := ⌊(i + j)/2⌋
  T' := optimal_bst(s, i, m-1)
  T" := optimal_bst(s, m+1, j)
  let T be the tree whose root contains s_m
  let the left subtree of T be T'
  let the right subtree of T be T"
  return(T)
end o_bst
```

**٤-٩٧ خاطئة** (F)**. مثال مناقض:**

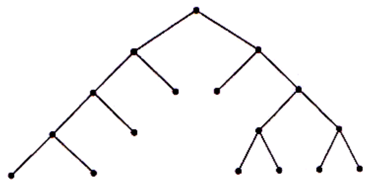


٤-٩٨ أ)



ب) لا يوجد مثل هذا المخطط ، فوجوده يناقض نظرية ٤-١٠.

ج)



٤-٩٩ أ) $m\, i + 1$ ب) $(m - 1)\, i + 1$

٤-١٠٠ المدخلات: عدد صحيح $n > 1$.

المخرجات: شجرة ثنائية تامة T عدد رؤوسها الطرفية n.

```
procedure full_binary_tree(n)
   T := a rooted tree with one vertex
   for i := 1 to n-1 do
      begin
      let v be a terminal vertex
      give v two children
      end
   return(T)
end full_binary_tree
```

٤-١٠١ المدخلات: كلمة w مطلوب إدخالها في شجرة بحث ثنائية T.

المخرجات: شجرة البحث الثنائية T بعد تحديثها (updated bst) أي بعد إدخال w.

```
procedure bst_recurs(w, T)
   if T = null then
      begin
      let T be the tree with one vertex, root
      store w in root
      return(T)
      end
```

```
    s := word in T's root
    if w < s then
        if T has no left child then
            give T a left child and store w in it
        else
            begin
            left := left child of T
            bst_recurs(w, left)
            end
    else
        if T has no right child then
            give T a right child and store w in it
        else
            begin
            right := right child of T
            bst_recurs(w, right)
            end
    return(T)
end bst_recurs
```

**٤–١٠٢** t – 1

**٤–١٠٣ المدخلات: جذر "root" شجرة ثنائية غير خاوية مخزون فيها بيانات.**

**المخرجات: true: إن كانت الشجرة الثنائية شجرة بحث ثنائية.**

**false: إن لم تكن الشجرة الثنائية شجرة بحث ثنائية.**

**وإن كانت الشجرة شجرة بحث ثنائية فإن الخوارزمية تعطى**

**small: أصغر قيمة في الشجرة ،**

**large: أكبر قيمة في الشجرة.**

```
procedure is_bst(root, small, large)
    if root has no children then
        begin
        small := value of root
        large := value of root
        return(true)
        end
    lchild := left child of root
```

```
    rchild := right child of root
    if is_bst(lchild, small_left, large_left) and is_bst(rchild,
                                        small_right, large_right) then
        begin
        val := value of root
        if large_left > val or small_right < val then
            return(false)
        small := small_left
        large := large_right
        return(true)
        end
    else
        return(false)
end is_bst
```

٤-١٠٤ أ) متوازنة　　　ب) متوازنة

ج) غير متوازنة　　　د) متوازنة

٤-١٠٥ أ) *) الشجرة التي ارتفاعها 0 فيها رأس واحدة ، ولذلك $N_0 = 1$.

*) في الشجرة الثنائية المتوازنة التي ارتفاعها 1 يجب أن يكون للجذر root ابن واحد (one child) على الأقل. إذا كان للجذر ابن واحد بالضبط فإن عدد الرؤوس سيكون أقل ما يمكن (minimized) ، ولذلك $N_1 = 2$.

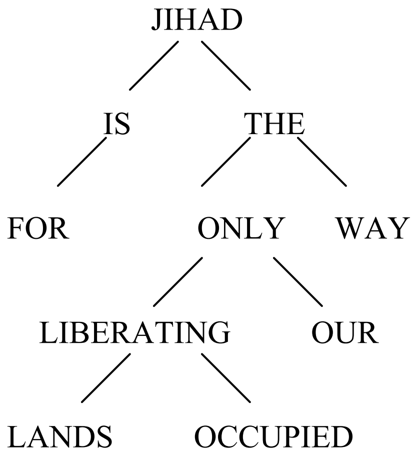
*) في الشجرة الثنائية المتوازنة التي ارتفاعها 2 يجب أن يكون هناك مسار من الجذر إلى رأس طرفية طوله 2. هذا يعني وجود 3 رؤوس. ولكن كي تكون الشجرة متوازنة يجب أن يكون للجذر ابنان (2 children). ولذلك $N_2 = 4$.

ب) إذا وُجِدَتْ شجرتان متوازنتان ارتفاعاهما h-1, h-2 بأقل عدد من الرؤوس ، فإنه يمكننا تكوين (forming) الشجرة المطلوبة التي ارتفاعها h بإلحاق (attaching) هاتين الشجرتين كشجرة فرعية يمنى وشجرة فرعية يسرى لجذر جديد. ولذلك

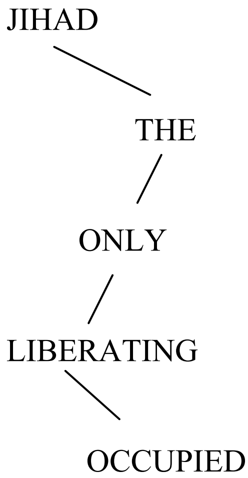
$$N_h = N_{h-1} + N_{h-2} + 1$$

٤-١٠٦ 16

٤-١٠٧ أ)



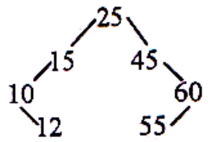

ب) أولا نقـــارن MARTYRDOM بكلمـــة JIHAD في الجــــــذر. وحيـــــث أن MARTYRDOM أكــبر مـــن JIHAD نتجــه إلى الابــن الأيمــن. وحيــث أن MARTYRDOM أصغر من THE نتجه إلى الابن الأيسر ، وهكذا كما يوضح مسار البحث المبين بالشكل إلى أن نصل إلى OCCUPIED ، وحيــــــــــــث أن MARTYRDOM أصـغر منهـا نحـاول الاتجاه إلى الابن الأيسر ، وحيث أنه لا يوجــد ابـــن أيســـر نســـتنتج أن كلمـــة MARTYRDOM ليست في الشجرة.



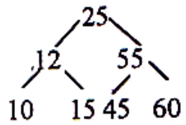

٤-١٠٨ الشجرة (ب) شجرة بحث ثنائية ، بينما الشجرة (أ) ليست شجرة بحث ثنائية.

٤-١٠٩

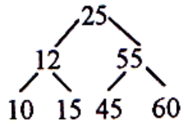
(أ)



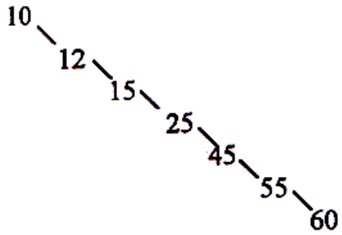

(ب)




(ج)




(د)




**من بين الأربع أشجار السابقة تعد الشجرتان (ب) و (ج) أعلى كفاءة من حيث البحث عن عنصر معين. ويُطلق على أي من هاتين الشجرتين الاسم:"شجرة بحث ثنائية ممتلئة"** (full binary search tree)، **وهي شجرة البحث الثنائية التي يكون لكل عقدة من عقدها – باستثناء الأوراق – شجرة فرعية يمنى وشجرة فرعية يسرى. وتكون عملية البحث في مثل هذه الشجرة من رتبة** (O(log n . **ونلاحظ في شجرة البحث الثنائية (د) أن كل عقدة لها شجرة فرعية يسرى خالية . وعملية البحث في هذه الشجرة تكون من رتبة** (O(n، **تماماً كعملية البحث في قائمة مترابطة لها المفاتيح** (keys) **نفسها.**

٤-١١٠ **باستثناء مقارنات المؤشرات** (pointer comparisons) [ **لاختبار مؤشر التلاشي** NULL ] :

(أ) **المفتاح الهدف** 50 (target key):

مطلوب مقارنتان للوصول إلى الهدف.

| الشجرة الفرعية التي نتجه إليها Subtree taken | النتيجة Result | المفتاح Key |
|---|---|---|
| اليمنى | 40 < 50 | 40 |
| نتوقف | 50 = 50 | 50 |

(ب) المفتاح الهدف 55:

مطلوب أربع مقارنات للوصول إلى الهدف.

| الشجرة الفرعية التي نتجه إليها Subtree taken | النتيجة Result | المفتاح Key |
|---|---|---|
| اليمنى | 40 < 55 | 40 |
| اليمنى | 50 < 55 | 50 |
| اليسرى | 60 > 55 | 60 |
| نتوقف | 55 = 55 | 55 |

(ج) المفتاح الهدف 10:

مطلوب ثلاث مقارنات للوصول إلى الهدف.

| الشجرة الفرعية التي نتجه إليها Subtree taken | النتيجة Result | المفتاح Key |
|---|---|---|
| اليسرى | 40 > 10 | 40 |
| اليسرى | 15 > 10 | 15 |
| نتوقف | 10 = 10 | 10 |

(د) المفتاح الهدف 65:

مطلوب ثلاث مقارنات لتحديد أن 65 غير موجود.

| الشجرة الفرعية التي نتجه إليها Subtree taken | النتيجة Result | المفتاح Key |
|---|---|---|
| اليمنى | 40 < 65 | 40 |
| اليمنى | 50 < 65 | 50 |
| نتوقف | 60 < 65 | 60 |

(هـ) المفتاح الهدف 52:

**مطلوب أربع مقارنات لتحديد أن 52غير موجود.**

| الشجرة الفرعية التي نتجه إليها Subtree taken | النتيجة Result | المفتاح Key |
|---|---|---|
| اليمنى | 40 < 52 | 40 |
| اليمنى | 50 < 52 | 50 |
| اليسرى | 60 > 52 | 60 |
| نتوقف | 55 > 52 | 55 |

**(و) المفتاح الهدف** 48:

**مطلوب مقارنتان لتحديد أن** 48 **غير موجود.**

| الشجرة الفرعية التي نتجه إليها Subtree taken | النتيجة Result | المفتاح Key |
|---|---|---|
| اليمنى | 40 < 48 | 40 |
| نتوقف | 50 > 48 | 50 |

**٤-١١١ (أ) لا توجد شجرة فرعية يسرى لأي عقدة ، وإنما توجد شجرة فرعية يمنى فقط. ورتبة البحث في مثل هذه الشجرة** O(n) .

**(ب)** (i) **نعم الشجرة شجرة بحث ثنائية** bst.

(ii) 10, 20, 25, 30, 40, 50, 90

(iii) 30, 20, 10, 25, 50, 40, 90

(iv) **نعم هناك أكثر من متتابعة واحدة تحقق الشروط المذكورة.**

**٤-١١٢ في شجرة البحث الثنائية** (bst):

left child < parent < right child

**الابن الأيمن > الوالد > الابن الأيسر**

parent > all of its descendants in its left subtree

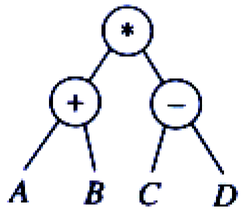
**الوالد > جميع ذريته في شجرته الفرعية اليسرى**

**سابعا: الاجتياز الشامل للأشجار**

٤-١١٣

| | سابق الترتيب<br>preorder | الترتيبي<br>inorder | لاحق الترتيب<br>postorder |
|---|---|---|---|
| أ | ABDCE | BDAEC | DBECA |
| ب | ABCDEF | CBEFDA | CFEDBA |
| ج | ABHIKLMJCDEFG | ILKMHJBADFEGC | LMKIJHBFGEDCA |
| د | ABCDE | EDCBA | EDCBA |
| هـ | ABCDEFG | DCBAEFG | DCBGFEA |

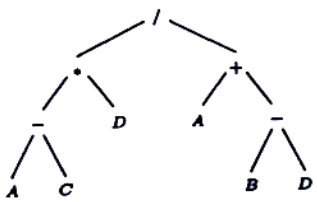
٤-١١٤ أ)




البادئة: prefix: * + AB - CD

اللاحقة: postfix: AB + CD - *

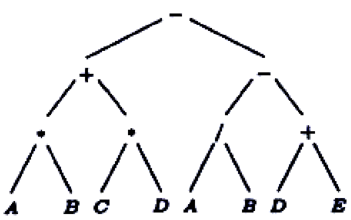
ب)




البادئة: prefix: /* - ACD + A - BD

اللاحقة: postfix: AC – D*ABD - +/

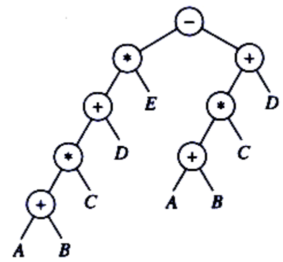
ج)



البادئة: prefix: -+*AB*CD -/AB + DE

اللاحقة: postfix: AB*CD* + AB/DE + --

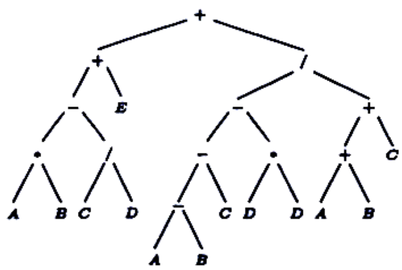
د)



البادئة: prefix: -*+*+ABCDE+*+ABCD

اللاحقة: postfix: AB+C*D + E*AB+C*D+-

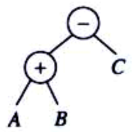
هـ)



البادئة: prefix: ++-*AB/CDE/- - - ABC*DD++ABC

اللاحقة: postfix: AB*CD/-E+AB-C-DD*-AB+C+/+

٤–١١٥ أ)

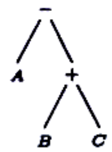


البادئة: prefix: - + ABC

الوسطية المعتادة: usual infix: A + B – C

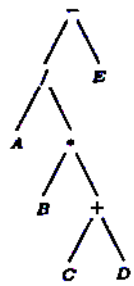
الوسطية تامة الأقواس: parened infix: ((A + B) – C)

ب)



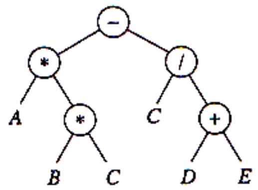

| | | |
|---|---|---|
| prefix: | - A + BC | البادئة: |
| usual infix: | A – (B+C) | الوسطية المعتادة: |
| parened infix: | (A-(B+C)) | الوسطية تامة الأقواس: |

ج)



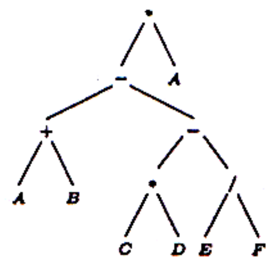

| | | |
|---|---|---|
| prefix: | -/A*B+CDE | البادئة: |
| usual infix: | A/(B*(C+D))-E | الوسطية المعتادة: |
| parened infix: | ((A/(B*(C+D)))-E) | الوسطية تامة الأقواس: |

د)




| | | |
|---|---|---|
| prefix: | -*A*BC/C+DE | البادئة: |
| usual infix: | A*B*C-C/(D+E) | الوسطية المعتادة: |
| parened infix: | ((A*(B*C))-(C/(D+E))) | الوسطية تامة الأقواس: |

هـ)




البادئة: prefix: *-+AB-*CD/EFA

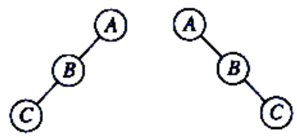
الوسطية المعتادة: usual infix: (A+B-(C*D-E/F))*A

الوسطية تامة الأقواس: parened infix: (((A+B)-((C*D)-(E/F)))*A)

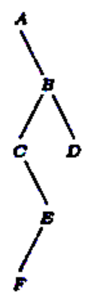
٤-١١٦ أ) -4 ب) 0 ج) -16

د) 0 هـ) 16 و) -6

٤-١١٧




٤-١١٨ الشجرة المطلوبة هي:




نظرا للنتيجة المعطاة للاجتياز سابق الترتيب فإن جذر الشجرة هو A. ولو كان للجذر A ابن أيسر لما بدأ الاجتياز الترتيبي بالجذر A. وحيث أن A

ليس له ابن أيسر فإننا نعلم من الاجتياز سابق الترتيب أن الابن الأيمن للرأس A هو B. ويستمر برهان صحة هذه الشجرة المرسومة بهذه الكيفية.

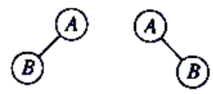
٤-١١٩ المدخلات: **pr**: قائمة الاجتياز سابق الترتيب (preorder list).

**in**: قائمة الاجتياز الترتيبي (inorder list).

المخرجات: **root**: جذر الشجرة الثنائية ذات قائمتي الاجتياز (سابق الترتيب والترتيبي) المعطاتين.

```
procedure make_tree(pr, in)
    if |pr| = 0 then
        return(null)
    ch := first character in pr
    create a vertex v
    store ch in v
    root := v
    choose strings st1 and st2 such that in = st1 || ch || st2 // || is the
                                                concatenation operator
    let pr' be the substring of pr obtained by omitting ch
    choose strings st1' and st2' such that pr' = st1' || st2', where st1'
       (respectively, st2') is a permutation of st1 (respectively, st2)
    left subtree of root := make_tree(st1', st1)
    right subtree of root := make_tree(st2', st2)
return(root)
end make_tree
```

٤-١٢٠




٤-١٢١ ليس ضروريا. خذ مثلا الحالة : $P_1$ = ABCDEF, $P_2$ = DBCAEF

٤-١٢٢ المدخلات: **pt**: جذر شجرة ثنائية

المخرجات: محتويات الرؤوس الطرفية من اليسار إلى اليمين.

```
procedure print_terminals(pt)
    if pt = null then
        return
    if pt is a terminal then
        begin
        print contents of pt
        return
        end
    left := left child of pt
    print_terminals(left)
    right := right child of pt
    print_terminals(right)
end print_terminals
```

٤-١٢٣ المدخلات: **PT**: جذر شجرة ثنائية.

المخرجات: **PT**: جذر الشجرة الثنائية المعدلة.

```
procedure swap_children(PT)
    if PT is empty then
        return
    swap the left and right children of PT
    t := left child of PT
    swap children(t)
    r := right child of PT
    swap children(r)
end swap children
```

٤-١٢٤ المدخلات: **pt**: جذر شجرة ثنائية.

المخرجات: إعطاء كل رأس قيمة ابتدائية تساوي عدد عناصر ذريتها.

```
procedure descendants(pt)
    if pt = null then
        return
    numb_desc := 0
    left := left child of pt
    if left ≠ null then
        begin
        descendants(left)
        numb_desc := 1 + contents(left)
        end
    right := right child of pt
```

```
    if right ≠ null then
        begin
        descendants(right)
        numb_desc := numb_desc+1+contents(right)
        end
    contents(pt) :+ numb_desc
end descendants
```

**٤-١٢٥ أ) نعرِّف "قطعة ابتدائية من سلسلة رموز"** (initial segment of a string) **بأنها أول** i **رمز** (first i characters) **(حيث** i **عددٌ ما** $i \geq 1$) **من السلسلة.**

**ونعرِّف**

$$r(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = A, B, ..., Z \\ -1 & \text{for } x = +, -, *, / \end{cases}$$

**وإذا كانت** $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **سلسلة رموز على** $\{A, B, \cdots, Z, +, -, *, /\}$ (a string over) **فإننا نعرِّف**

$$r(x_1, \cdots, x_n) = r(x_1) + \cdots + r(x_n)$$

**والآن أي سلسلة رموز** S **تكون تعبيرا صحيحا بالصيغة اللاحقة** (postfix string) **إذا وفقط إذا كان**

$$r(s) = 1, \quad r(s') \geq 1$$

**وذلك لجميع القطع الابتدائية** s' **من** s.

**ب) المدخلات:** **pt**: **جذر شجرة ثنائية تمثل تعبيرا.**

**المخرجات: صيغة التعبير الوسطية تامة الأقواس.**

```
procedure print_expression(pt)
    if pt = null then
        return
    if pt is a terminal then
        beign
        print contents(pt)
        return
        end
    print '('
    left := left child of pt
```

```
    print_expression(left)
    print contents(pt)
    right := right child of pt
    print_expression(right)
    print ')'
end print_expression
```

٤–١٢٦ المدخلات: **pt**: جذر شجرة شفرة هوفمان ، وسلسلة رموز α.

المخرجات: الرموز (characters) وشفراتها (codes) ، حيث كل شفرة تسبقها α (prefixed by). ولطباعة الشفرات فقط نستدعي الإجراء مع وضع α تساوي السلسلة الخاوية (null string).

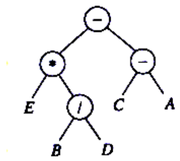
```
procedure huffman(pt, α)
    if pt is a terminal then
        begin
        print character stored in pt
        print α
        return
        end
    left := left child of pt
    huffman(left, α || 1) // || is concatenation
```

٤–١٢٧ أ) سابق الترتيب: ABFGCDE

ب) الترتيبي: BGFAEDC

ج) لاحق الترتيب: GFBEDCA

٤–١٢٨ أ)




ب) اللاحقة: postfix: EBD/ *CA - -

الوسطية تامة الأقواس: parened infix: ((E*(B/D)) – (C-A))

## أسماء بعض المراجع عن الرياضيات المتقطعة في علم الحاسوب
## References On Discrete Mathematics In Computer Science

فيما يلي قائمة بأسماء بعض الكتب والمراجع عن الرياضيات المتقطعة في علم الحاسوب ، والقائمة مرتبة أبجدياً بالنسبة لأسماء المؤلفين.


1) A First Course in Discrete Mathematics, Ian Anderson
Springer-Verlag, 2000

2) Discrete Mathematics With Applications, Susanna S. Epp
Brooks/Cole Publishing Company; 2nd edition, 1996
ISBN: 0534944469

3) Discrete Mathematics with Graph Theory, Edgar G. Goodaire
Prentice Hall; 2nd editon, 2001
ISBN:0130920002

4) Discrete Mathematics, Richard Johnsonbaugh
Houghton Mifflin College Div; 5th editon, 1997
ISBN: 0395771145

5) Discrete Mathematics with Applications, Thomas Koshy
Academic Press, 2003
ISBN: 0124211801

6) 2000 Solved Problems in Discrete Mathematics, Seymour Lipschutz
Prentice Hall; 5th edition, 2000
ISBN: 0130890081

7) Computational Discrete Mathematics, Sriram Pemmaraju, Steven Skiena
Cambridge University Press; 2003
ISBN: 0521806860

8) Discrete Mathematics and Its Applications, Kenneth H. Rosen
McGraw-Hill; 5th edition, 2003
ISBN: 0072930330

9) Discrete Mathematics and Its Applications, Lawrence C. Washington
Chapman & Hall/CRC; 2003
ISBN: 1584883650

# دليل المصطلحات العربية والإنجليزية
# Index

فيما يلي قائمة بالمصطلحات الإنجليزية مرتبة ترتيبا أبجديا ، والمصطلحات العربية المقابلة لها ، وكذلك بيان بأرقام الصفحات التي ظهرت فيها هذه المصطلحات.

| | | |
|---|---|---|
| combinatorial argument | ٢٠٨ | حُجَّة توافيقية/برهان توافيقي |
| combinatorial identity | ٢٠٣ | متطابقة توافيقية |
| communication line / link | ٣١٣ ، ٣٣١ | خط اتصال / وَصْلة |
| commutative law | ٨٧ | قانون التبادل |
| commutative operator | ١٧٤ | مؤثر تبادلي |
| commutativity | ١٧ | تبادلية |
| compact | ٩٧ | متراص / مختصر |
| compact disk (cd) player | ٧٥ | جهاز تشغيل الأقراص المضغوطة / المدمجة |
| comparable | ١٠٧ | قابل للمقارنة |
| comparison | ٣٤٧ | مقارنة |
| compiler | ٣٠٧ | المترجِم |
| complement | ٨٦ | المتمم |
| complement law | ٨٧ | قانون التمام |
| complete graph | ٢٣٧ | المخطط البياني التام |
| complicated function | ١٣٦ | دالة معقدة |
| component | ٢٤٢ | مركِّب |
| composition of 2 functions | ١٣٤ | تركيب (دالتين) |
| composition of 2 relations | ١١٠ | تركيب علاقتين |
| compound proposition | ٣ ، ٣٤ | افتراض مركَّب |
| compressing (a file) | ٣٣٢ | ضغط (ملف) |
| computer file system | ٢٥٥ | نظام ملفات الحاسوب |
| conclusion | ٦ ، ٤٥ | استنتاج / نتيجة |
| conditional proposition | ٦ | افتراض شَرطي |
| congruent triangles | ٤٠ | مثلثات متطابقة |
| conjunction rule | ٤٩ | قاعدة العطف |

| | | |
|---|---|---|
| existential generalization | ٥٢ | التعميم الوجودي |
| existential instantiation | ٥٢ | الاختيار الوجودي عند عنصر |
| existential quantifier | ٢٧ | مسوِّر وجودي |
| existentially quantified statement | ٢٧ | عبارة مُسَوَّرة وجوديا |
| exor (exclusive-or) | ٤ | أو المتنافية |
| expand | ٢٤ | يَبْسُط |
| expansion | ٢٠٣ | مفكوك |
| explicit formula | ٣٢٤ | صيغة صريحة |
| exponential function | ١٣٤ | الدالة الأسية |
| exportation | ١٩ | تصدير |
| factor | ٢٠٣ | عامل |
| fallacy | ٤٦ | مُغَالَطَة |
| false | ١ | خاطئ |
| finite sequence | ٩٣ | متتالية محدودة / منتهية |
| flip | ٢٢٢ | يقذف (قطعة نقدية) |
| floor | ١٢٨ | أرضية (اسم دالة) |
| forest | ٣٣٥ | غابة |
| formal algorithm | ٣٤٣ | خوارزمية رسمية / شكلية |
| free tree | ٢٥١ ، ٣٣٠ | شجرة حرة |
| free variable | ٢٧ | متغير حر |
| frequency | ٢٥٨ | تكرار / تردد / عدد تكرار |
| full binary tree | ٢٨١ | شجرة ثنائية تامة |
| full m-ary tree | ٣٤٤ | شجرة مِيمية تامة |
| fully parenthesized form (of an expression) | ٣٠٧ | صيغة (تعبير) تامة الأقواس |
| function | ١١٨ | دالة |

| | | |
|---|---|---|
| minimal spanning tree (mst) | ٢٧٢ | شجرة مولِّدة دنيا |
| mirror image | ٣٥٥ | انعكاس / صورة مرآة |
| model | ٢١١ | طراز |
| modified | ٥٨ | معدَّل |
| modulus | ١٢٦ | المقياس |
| modulus operator (mod) | ١٢٢ | مؤثر المقياس |
| modus ponens/detachment law | ٤٨ | قانون الفَصْل (مودس بوننز) |
| modus tollens law | ٤٩ | قانون "مودس تولنز" |
| multiple | ٢٧٣ | متعدد |
| multiplication principle | ١٨١ | مبدأ/قاعدة الضرب |
| multiplier | ١٢٦ | الضارب |
| necessary condition | ٧ | شرط ضروري |
| negation | ٥ | نَفْي |
| negative statement | ٣٦ | عبارة سلبية |
| n-fold compositon | ١٦٨ | تركيب ذو n طية |
| node | ٢٣١ | عقدة/عنصر |
| nondecreasing | ٩٤ | غير متناقص |
| nonempty | ٧٠ | غير خالي |
| nonincreasing | ٩٤ | غير متزايد |
| not | ٥ | أداة نَفْي |
| notation | ٢ | اصطلاح |
| n-tuple | ٩١ | عديد نوني |
| null set | ٨٢ | مجموعة خالية / خاوية |
| null string | ٩٩ | سلسلة خالية / خاوية / صفرية |
| numerical | ٩٦ | عددي |
| occupied | ١٢٥ | مشغول |

| | | |
|---|---|---|
| office | ١٨٩، ٣١٣ | منصب/مكتب |
| one-to-one function (injective) | ١٢٩ | دالة واحد لواحد (متباينة) |
| onto function (surjective) | ١٣١ | دالة على (غامرة) |
| operand | ٣٠٥ | معامَل |
| operating system | ٢٥٥ | نظام التشغيل |
| operator | ٣٠٥ | مؤثّر / معامِل |
| optimal path | ٢٣٦ | المسار الأمثل |
| optimal solution | ٢٧٨ | الحل الأَمْثَل / الأفضل |
| option | ٢١١ | اختيار |
| order | ٩٢ | ترتيب |
| ordered list | ٩١ | قائمة مرتبة |
| ordered pair | ٩٠ | زوج مرتب |
| orientation | ٣٢١ | اتجاه |
| out (v) | ٣٢٢ | درجة الخروج من الرأس v |
| out edge | ٣٢٥ | حرف خارج |
| outcome | ٢١٢ | نتيجة |
| outdegree of a vertex | ٣٢٢ | درجة الخروج من رأس |
| pairs | ٢٢ | ثنائيات / أزواج |
| pairwise disjoint | ٨٦ | متباعدة / منفصلة زوجاً زوجاً |
| palindrome | ٢١٣ | سلسلة مزدوجة القراءة (أي تُقرأ طردا أو عكسا بالكيفية نفسها) |
| parallel edges | ٢٣٣ | أحرف متوازية |
| parallelogram | ٤١ | متوازي أضلاع |
| parent | ٢٦٣ | والد |
| parity | ٣٢١ | نوعية |

| | | |
|---|---|---|
| relation / relationship | ١٠٠ | علاقة |
| relative complement | ٨٦ | المتمم النسبي |
| relay a message | ٣١٣ | ينقل رسالة |
| remainder | ١٠٢ | الباقي |
| repetition | ٢١٣ | تكرار |
| rephrase | ٧ | يعيد صياغة |
| represent | ٥ ، ٤٧ | يمثِّل |
| resolution (of a collision) | ١٢٥ | فك / تفريق تضارب / تصادم |
| retrieve | ١٢٤ | يسترجع / يستعيد |
| reverse | ١٥ | يعكس |
| Reverse Polish Notation (RPN) | ٣٠٥ | الاصطلاح البولندي المعكوس |
| road system | ٢٧٢ | نظام / شبكة طرق |
| roll (dice) | ٢١١ | يقذف (النرد) |
| rooted tree | ٢٥١ | شجرة ذات جذر |
| rotation | ١٩٣ | تدوير |
| round | ١٢٨ | يقرِّب |
| round-trip | ٢١٢ | رحلة مستديرة (ذهابا وإيابا) |
| r-permutation | ١٩٤ | تبديل-r |
| rule of inference | ٤٨ | قاعدة استدلال |
| secretary | ١٨٨ | أمين السر/السكرتير |
| seed | ١٢٦ | بذرة |
| sequence | ٤٥ ، ٩٢ | متتالية / متتابعة |
| set | ٨٢ | مجموعة |
| set equivalence | ١٧٤ | تكافؤ مجموعتين |
| set up | ٢٥٦ | ينشئ |
| shipment | ٢٢٢ | شحنة |

# كتب للمؤلف

# في الرياضيات وعلم الحاسوب

١- برمجة الحاسب بلغة الفورتران ، ط ٤ ، دار القلم .. الكويت ١٩٩٢.

٢- مقدمة في نظرية المعلومات ، ط ٢ ، دار القلم .. الكويت ١٩٩٣.

٣- الشبكات الرقمية ، دار القلم .. الكويت ١٩٨٦.

٤- التحليل العددي ، دار القلم .. الكويت ١٩٨٨.

٥- الجبر الخطي ، ط ٢ ، دار القلم .. الكويت ١٩٩٥.

٦- برمجة الحاسب بلغة الباسكال ، ط٢ ، دار القلم .. الكويت ١٩٩٩.

٧- البرمجة المتقدمة بلغة الباسكال ، مع د. حمزة رشوان ، دار القلم .. الكويت ١٩٩٤.

٨- الدوائر المتكاملة الرقمية (ترجمة) ، دار القلم .. الكويت ١٩٩٣.

٩- الخوارزميات والبرمجة بلغة الباسكال ، دار القلم .. الكويت ١٩٩٧.

١٠- بنى المعطيات ، مع د. حمزة رشوان ، دار القلم .. الكويت ١٩٩٨.

١١- الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية ، دار القلم .. الكويت ٢٠٠٠.

١٢- الحول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية ، دار القلم .. الكويت ٢٠٠١.

١٣- برمجة الحاسب بلغة C++ ، دار القلم .. الكويت ٢٠٠٢.

١٤- البرمجة المتقدمة بلغة C++ ، دار القلم .. الكويت ٢٠٠٣.

١٥- الرياضيات المتقطعة في علم الحاسوب ، مكتبة الفلاح .. الكويت ٢٠٠٤.

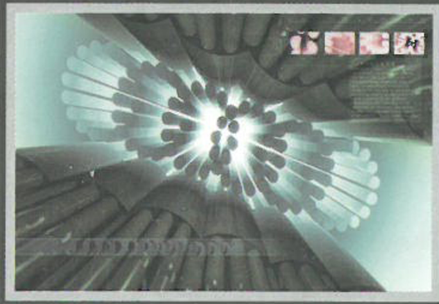
١٦- هياكل البيانات بلغة C++ ، مع د. حمزة رشوان ، مكتبة الفلاح .. الكويت.

١٧- برمجة الحاسوب بلغة C ، مكتبة الفلاح .. الكويت (تحت الطبع).

١٨- البرمجة المتقدمة بلغة C ، مكتبة الفلاح .. الكويت (تحت الطبع).

﴿ سُبْحَانَكَ لَا عِلْمَ لَنَا إِلَّا مَا عَلَّمْتَنَا إِنَّكَ أَنتَ الْعَلِيمُ الْحَكِيمُ ﴾

(سورة البقرة : ٣٢)



# DISCRETE MATHEMATICS

## In Computer Science

مكتبة الفلاح
للنشر والتوزيع

دولة الكويت
هاتف: ٢٦٤١٩٨٥ - فاكس: ٢٦٤٧٧٨٤-٠٠٩٦٥
ص.ب: ٤٨٤٨ الصفاة - الرمز البريدي ١٣٠٤٩

دولة الإمارات العربية المتحدة - العين - ص.ب: ١٦٤٣١
هاتف: ٧٦٦٢١٨٩ - فاكس: ٧٦٥٧٩٠١-٣ ٠٠٩٧١

تصميم الغلاف: أيوب

المطابع المركزية
عمان - الأردن